

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΕΠΑΛ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 65

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 87

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 27

A4. 1. Λάθος 2. Σωστό 3. Σωστό 4. Λάθος. 5. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. $f'(x) = \frac{1}{3}3x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x - 3$.

B2. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 \text{ \acute{a}\rho\alpha } x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται παρακάτω

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$		
f'(x)		+	0	-	0	+
f		\nearrow		\searrow		\nearrow

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[3, +\infty)$ και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -1$ το $f(-1) = \frac{8}{3}$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 3$ το $f(3) = -8$.

B3. Έστω $y = ax + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(0, f(0))$ ή $A(0, 1)$. Είναι

$$a = f'(0) = -3$$

και το σημείο $A(0, 1)$ ανήκει στην ευθεία άρα

$$y = -3x + \beta \text{ και } 1 = -3 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1.$$

Οπότε, $y = -3x + 1$.

$$\mathbf{B4.} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-3)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-3) = -4.$$

ΘΕΜΑ Γ

$$\mathbf{\Gamma 1.} \bar{x} = 4 \Leftrightarrow \frac{4+5+4+\kappa+0+3+7}{7} = 4 \Leftrightarrow \frac{23+\kappa}{7} = 4 \Leftrightarrow 23+\kappa = 28 \Leftrightarrow \kappa = 5.$$

\Gamma 2. Για $\kappa = 5$ οι παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά είναι:

$$0, 3, 4, 4, 5, 5, 7$$

οι οποίες είναι περιττού πλήθους και η διάμεσος τους είναι η μεσαία παρατήρηση, οπότε:

$$\delta = t_{\frac{7+1}{2}} = t_4 = 4.$$

\Gamma 3. Η διακύμανση είναι:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{x})^2}{7} = \frac{(t_1 - \bar{x})^2 + (t_2 - \bar{x})^2 + (t_3 - \bar{x})^2 + (t_4 - \bar{x})^2 + (t_5 - \bar{x})^2 + (t_6 - \bar{x})^2 + (t_7 - \bar{x})^2}{7} \\ &= \frac{(0-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (5-4)^2 + (7-4)^2}{7} \end{aligned}$$

$$= \frac{16+1+0+0+1+1+9}{7} = \frac{28}{7} = 4.$$

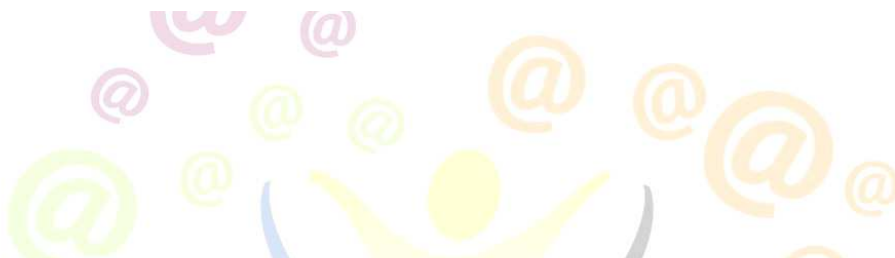
Γ4. Η τυπική απόκλιση είναι:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$$

και ο συντελεστής μεταβολής είναι:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ ή } 50\%.$$

Εφόσον, $CV > 10\%$ το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αφού το εμβαδό E του οικοπέδου είναι ίσο με 100 m^2 έχουμε

$$E = 100 \Leftrightarrow xy = 100 \Leftrightarrow y = \frac{100}{x}.$$

Η περίμετρος Π του οικοπέδου θα είναι:

$$\Pi = 2x + 2y \stackrel{y = \frac{100}{x}}{\Leftrightarrow} \Pi = 2x + 2 \frac{100}{x} \Leftrightarrow \Pi = 2x + \frac{200}{x}.$$

Άρα η περίμετρος Π ως συνάρτηση του x είναι

$$\Pi(x) = 2x + \frac{200}{x}, \quad x > 0.$$



$$\Delta 2. \text{ Είναι } \Pi'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2} = \frac{2(x^2 - 100)}{x^2}, x > 0.$$

Ισχύει ότι $\frac{2}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 0$ άρα οι ρίζες και το πρόσημο της $\Pi'(x)$ εξαρτώνται από το $x^2 - 100$.

$$\bullet x^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 100 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x = 10.$$

x	0	10	$+\infty$
$\Pi'(x)$	-	0	+
Π	\searrow		\nearrow

Η συνάρτηση Π είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 10]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [10, +\infty)$.

Η συνάρτηση Π παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 10$ οπότε $y = \frac{100}{10} = 10$.

$\Delta 3.$ Είναι

$$x_1 < x_2 \stackrel{x_1, x_2 \in (0, 10)}{\Rightarrow} \text{Π γν. φθίν. στο } (0, 10) \Rightarrow \Pi(x_1) > \Pi(x_2) \Rightarrow \Pi(x_1) - \Pi(x_2) > 0 \stackrel{x_1 - x_2 < 0}{\Rightarrow} \frac{\Pi(x_1) - \Pi(x_2)}{x_1 - x_2} < 0.$$

$\Delta 4.$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\Pi'(x)}{\sqrt{10x} - 10} &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x^2 - 100)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x^2 - 100)}{(\sqrt{10x} - 10)x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x - 10)(x + 10)(\sqrt{10x} + 10)}{(\sqrt{10x} - 10)(\sqrt{10x} + 10)x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x - 10)(x + 10)(\sqrt{10x} + 10)}{(10x - 100)x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x - 10)(x + 10)(\sqrt{10x} + 10)}{10(x - 10)x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x + 10)(\sqrt{10x} + 10)}{10x^2} \\ &= \frac{2(10 + 10)(\sqrt{10 \cdot 10} + 10)}{10 \cdot 10^2} \\ &= \frac{2 \cdot 20 \cdot 20}{1000} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$