

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2026 (ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 133

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 51

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 185

A4. α) Λάθος β) Σωστό γ) Σωστό δ) Σωστό ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

$$B1. D_f = (1, +\infty), D_g = [2, +\infty)$$

Η $h = f \circ g$ ορίζεται όταν και μόνο όταν:

$$x \in D_g \Leftrightarrow x \geq 2$$

και

$$g(x) \in D_f \Leftrightarrow g(x) > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} + 1 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

Επομένως $D_h = (2, +\infty)$ με:

$$\begin{aligned} h(x) &= (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 \ln(g(x) - 1) = 2 \ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1) \\ &= 2 \ln \sqrt{x-2} = \ln \sqrt{x-2}^2 = \ln(x-2) \end{aligned}$$

B2. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(2, +\infty)$ με:

$$h'(x) = \frac{1}{x-2} > 0 \Rightarrow h \nearrow D_h \text{ οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται.}$$

Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο D_h , οπότε:

$$h(D_h) = \left(\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) \stackrel{x-2=u}{=} \lim_{\substack{u_0 \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0^+}} \ln u = -\infty$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-2) \stackrel{x-2=u}{=} \lim_{\substack{u_0 \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow +\infty}} \ln u = +\infty$$

Για κάθε $x \in D_h = (2, +\infty)$ και $y \in h(D_h) = \mathbb{R}$

$$\text{θέτουμε } h(x) = y \Leftrightarrow x = h^{-1}(y)$$

$$h(x) = y \Leftrightarrow \ln(x-2) = y \Leftrightarrow \ln(x-2) = \ln e^y \Leftrightarrow x-2 = e^y$$

$$\Leftrightarrow x = e^y + 2 \Leftrightarrow h^{-1}(y) = e^y + 2, y \in \mathbb{R}$$

Άρα $h^{-1}(x) = e^x + 2$ με $D_{h^{-1}} = \mathbb{R}$

B τρόπος

Θα μπορούσαμε να δείξουμε την αντιστρεψιμότητα και με τον ορισμό της 1-1 συνάρτησης

$$\mathbf{B3.} \lim_{x \rightarrow 2} \left(h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right) \stackrel{-\infty \cdot 2}{=} -\infty$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = -\infty \text{ από B2}$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \ln(x-1)}{x-2} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2}{x-1}}{1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x-1} = 2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i) Εφόσον η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

Αν $\kappa > 0$ τότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \kappa x = +\infty \text{ το οποίο είναι άτοπο.}$$

Αν $\kappa < 0$ τότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \kappa x = -\infty \text{ το οποίο είναι άτοπο.}$$

Επομένως $\kappa = 0$

ii) Αν $\mu = 0$ τότε είναι $f(x) = 0$ η οποία απορρίπτεται αφού η f έχει εφαπτομένη την $y = x$ στο σημείο $(0, 0)$ οπότε θα πρέπει $f'(0) = 1$

Αν $\mu \neq 0$ τότε:



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ το οποίο είναι δεκτό.}$$

$$\text{Άρα για } \kappa = 0 \text{ και } \mu \neq 0 \text{ είναι } f(x) = \frac{\mu x}{x^2 + 1}$$

$$\text{Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με } f'(x) = \frac{\mu(x^2 + 1) - 2\mu x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

Αφού η $y = x$ είναι εφαπτομένη της C_f στην αρχή των αξόνων τότε πρέπει:

$$f'(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{\mu - 0}{1} = 1 \Leftrightarrow \mu = 1$$

$$\text{Οπότε είναι } f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R} \text{ με } f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\Gamma 2. \text{ i) } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow x > 1 \text{ ή } x < -1$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-
f	\searrow	T.E	\nearrow	T.M

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο -1 το $f(-1) = -\frac{1}{2}$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 1 το $f(1) = \frac{1}{2}$

ii) Στο $\Delta_1 = (-\infty, 1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(\Delta_1) = \left[f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = \left[-\frac{1}{2}, 0 \right), \text{ διότι:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Στο $\Delta_2 = [-1, 1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα $f(\Delta_2) = [f(-1), f(1)] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$

Στο $\Delta_3 = [1, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα $f(\Delta_3) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1) \right] = \left(0, \frac{1}{2} \right]$,

διότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι:

$$f(D_f) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

Για το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$ έχουμε:

Είναι $\frac{1}{2} + \alpha^2 \geq \frac{1}{2}$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, οπότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Αν $\frac{1}{2} + \alpha^2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ τότε το $\frac{1}{2} + \alpha^2 \notin f(D_f)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$ είναι αδύνατη για $\alpha \neq 0$.

Αν $\frac{1}{2} + \alpha^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = 0$ τότε η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$ έχει μοναδική λύση την $x=1$

$$\begin{aligned} \Gamma 3. \text{ i) } I_\nu + I_{\nu+1} &= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1} + x^{2\nu+3}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}(1+x^2)}{x^2+1} dx = \\ &= \int_0^1 x^{2\nu+1} dx = \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2} \right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2} \quad (1)$$

$$\text{ii) } I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

Για $\nu=0$ στη σχέση (1) έχουμε:

$$I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$$

Για $\nu=1$ στη σχέση (1) έχουμε:

$$I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$$

Για $\nu=1$ στη σχέση (1) έχουμε:

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) \Leftrightarrow I_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = g(x) + x$ ορισμένη στο $[-1, 0]$

- Η h είναι συνεχής το $[-1, 0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων
- $h(-1) = g(-1) - 1 < 0$

και

$$h(0) = g(0) + 0 = g(0) > 0$$

διότι από υπόθεση ξέρουμε ότι $0 < g(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε

$$h(x_1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) + x_1 = 0$$

Επίσης η h είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 0)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$$

Όμως h' είναι συνεχής στο $(-1, 0)$ διότι η g' είναι συνεχής στο $(-1, 0)$ από υπόθεση άρα η h' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1, 0)$.

Συνεπώς η h είναι γνησίως μονότονη άρα το x_1 μοναδική ρίζα της h στο $(-1, 0)$.

B τρόπος (για τη μοναδικότητα της ρίζας)

Για να δείξουμε ότι η ρίζα x_1 είναι μοναδική, μπορούμε να υποθέσουμε ότι έστω ότι η συνάρτηση h έχει δυο ρίζες x_1, x_2 .

Εφαρμόζουμε Θεώρημα Rolle για την h στο διάστημα $[x_1, x_2]$:

- Η h είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[x_1, x_2]$ (αφού g παραγωγίσιμη άρα και συνεχής)
- Η h παραγωγίσιμη στο ανοιχτό (x_1, x_2)
- $h(x_1) = h(x_2) = 0$ (αφού είναι ρίζες)

Άρα υπάρχει 1 τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) + 1 = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) = -1 \text{ που είναι ΑΤΟΠΟ από την υπόθεση.}$$

Άρα αναγκαστικά η ρίζα x_1 είναι μοναδική.

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Όμως

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2(g(x) + x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2(g(x) + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (xg(x) + x^2) = 0g(0) + 0 = 0$$

διότι η g είναι συνεχής.

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta\mu x + \epsilon\phi x - \kappa x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \kappa \right) = 2 + 1 - \kappa = 3 - \kappa$$

Αφού τα πλευρικά είναι ίσα άρα $3 - \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 3$

Δ3.

i) Στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f(x) = 2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x$, παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με

$$f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 (2\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} > 0, \text{ άρα η συνάρτηση}$$

f ως συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι :

Για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$: $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0$ (οεδ)

ii) Είναι $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x) = +\infty$, γιατί :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} 3x = \frac{3\pi}{2} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\epsilon\phi x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \right) = +\infty, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1 > 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sigma\upsilon\nu x = 0 \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu x > 0 \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Έτσι, αφού f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, θα είναι

$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) \right) = [0, +\infty).$$

$\frac{\pi}{3} \in [0, +\infty) = f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$, το οποίο είναι μοναδικό επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Δ4.

i) Η συνάρτηση $h(x) = g(x) + x$, $x \in [x_1, 0]$, είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = g'(x) + 1$ που είναι συνεχής και μη μηδενιζόμενη στο $(x_1, 0)$, αφού $g'(x) \neq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(x_1, 0)$.

Αν είναι $h'(x) < 0$, για κάθε $x \in (x_1, 0)$, τότε h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1, 0]$. Έτσι :

$x_1 < 0 \Rightarrow h(x_1) > h(0) \stackrel{\Delta 1}{\Rightarrow} 0 > g(0)$, που είναι άτοπο, αφού $0 < g(x) < 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα είναι $h'(x) > 0$, οπότε h είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1, 0]$ και έτσι :

$x_1 \leq x \leq 0 \stackrel{h'}{\Rightarrow} h(x_1) \leq h(x) \leq h(0) \Rightarrow 0 \leq g(x) + x \leq g(0)$. Αλλά :

Στο διάστημα $[x_1, 0]$ είναι $f(x) = x^2 h(x) \geq 0$ και αφού $f(0) = 0$, τελικά είναι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [x_1, 0]$, όπως θέλαμε.

ii) Το χωρίο που περιγράφεται στην εκφώνηση είναι το

$$E(\Omega) = \int_{x_1}^{f(x_1)} |f(x)| dx = \int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$$

$$\text{Δίνεται ότι } \int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx \Leftrightarrow I_1 = I_2 \quad (1)$$

$$I_1 = \int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_{x_1}^0 x^2 (g(x) + x) dx = \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx + \int_{x_1}^0 x^3 dx \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx &= \int_{x_1}^0 \left(\frac{x^3}{3} \right)' g(x) dx = \left[\frac{x^3}{3} g(x) \right]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3} g'(x) dx = \\ &= 0 - \frac{x_1^3}{3} g(x_1) - \int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3} g'(x) dx \stackrel{\Delta 1}{=} -\frac{x_1^3}{3} (-x_1) - \int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3} g'(x) dx = \frac{x_1^4}{3} - \int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3} g'(x) dx \end{aligned}$$

και

$$\int_{x_1}^0 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{x_1}^0 = -\frac{x_1^4}{4}$$

Άρα από τη σχέση (2)

$$I_1 = \frac{x_1^4}{3} - \int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3} g'(x) dx - \frac{x_1^4}{4} = -\int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3} g'(x) dx + \frac{x_1^4}{12} \quad (3)$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - 3x) dx = \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln(\sigma\upsilon\nu x) - \frac{3x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= -2\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} - \ln\left(\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}\right) - \frac{3\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}{2} + 2\sigma\upsilon\nu 0 + \ln(\sigma\upsilon\nu 0) =$$

$$= -1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi^2}{6} + 2 = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \quad (4)$$

Από τη σχέση (1), εξ' αιτίας των (3) και (4) έχουμε :

$$-\int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3} g'(x) dx + \frac{x_1^4}{12} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = -\frac{x_1^4}{12} + 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = \frac{x_1^4}{4} - 3 - 3 \ln 2 + \frac{\pi^2}{2}$$

