ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Καρακάξης
ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΕΣ-ΘΕΤΙΚΕΣ-ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΣΠΟΥΔΕΣ
ΔΗΜΟΤΙΚΟ-ΓΥΜΝΑΣΙΟ-ΛΥΚΕΙΟ-ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
Τηλέφωνα: 210.98.12.105, 697.83.06.175, 698.69.26.518

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών .

Α2. Να γράψετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού.

Α3. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ’ ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν ισχύει $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β) τότε να δείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Α4.

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **ΛΑΘΟΣ** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει |ημx| <|x|, για κάθε x ϵ $\mathbf{R}^*$

β) Έστω η συνάρτηση f(x) = σφx. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R_2 = **R** − {x | ημx = 0} και ισχύει

$$f'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

γ) Έστω f συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β] τότε

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta)-G(\alpha)$$

δ) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ’ ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν $f'(x_0)=0$ τότε η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0.

ε) Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α.Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα x ϵ A, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με **f (A)**. Είναι δηλαδή:

f (A) = { y | y = f(x) για κάποιο x ϵ A}.

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-2\sqrt{x}+1, x\geq 0$

Β1. Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να εξετάσετε αν έχει ασύμπτωτες

Β3. Με βάση τα β1 και β2 να σχεδιάσετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της f

Β4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in[0,1]$ $(fof)(x)=x$.

Β5. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}[2026\cdot(fof)(x)\ \ln x]$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Δίνονται οι συναρτήσεις

$f(x)=x-\eta\mu x$ και $h(x)=\sigma\upsilon\nu x-x-1, x\in\mathbb{R}$

Γ1. Να βρείτε το πρόσημο των f, h .

Γ2. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_h

Γ3. Να δείξετε ότι η C_f δέχεται μοναδική εφαπτομένη στο $(\pi,2\pi)$ που να διέρχεται από το $A(0,1)$.

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{h(x)}$

Γ5. Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu(x+1)<\eta\mu(x+1)-\eta\mu x<\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x\in(0,\pi-1)$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνονται τα συνευθειακά σημεία Μ, Α, Δ με $\mathrm{M}\left(2\sigma\upsilon\nu^2\theta-1,\ \eta\mu 2\theta\right),\ \theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$,

$\mathrm{A}\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, και σημείο Δ του άξονα x΄x.

Δ₁. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του σημείου Μ και να αποδείξετε ότι η τετμημένη του Δ είναι ίση με $\mathrm{x}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2\theta}{1-2\eta\mu 2\theta}$.

Δ₂. Αν το τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{ME}}$ με Ε(1,0) έχει μήκος $\ell=\dfrac{\pi}{4}$ να δείξετε ότι $(\mathrm{ME})=2\eta\mu\dfrac{\pi}{8}$.

Δ₃. Αν η γωνία θ αυξάνει με ρυθμό 2 rad/sec, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ, τη χρονική στιγμή που η γωνία θ(t)=$\dfrac{\pi}{8}$.

Δ₄. Ένα σώμα Κ κινείται στην καμπύλη C: $y=\alpha\cdot x^2$, $\mathrm{x}\geq 0$ και έστω Β η προβολή του Κ στον άξονα Οx. Δίνεται ότι η καμπύλη C διέρχεται από το σημείο Μ τη χρονική στιγμή του ερωτήματος Γ_3. και το Β απομακρύνεται από το Ο(0,0) με ρυθμό $\sqrt{2}$ m/sec. Τη στιγμή που η τετμημένη του Κ είναι $2\sqrt{2}$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής:

α. της απόστασης (ΟΛ), όπου Λ το σημείο τομής της εφαπτομένης της καμπύλης C στο Κ, με τον άξονα x΄x.

β. της γωνίας $\Lambda\hat{\mathrm{O}}\mathrm{K}$.