

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ**

**ΘΕΜΑ Α:**

**A1.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 76

**A2.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 129

**A3.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 144

- A4.** 1. Σωστό  
2. Λάθος  
3. Λάθος  
4. Λάθος  
5. Σωστό

**ΘΕΜΑ Β :**

**B1.** η f παρ/μη στο  $(0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0,1)$$

Η f συνεχής στο  $[0,1]$  άρα η f  $\searrow$  στο  $[0,1]$ .

Η f συνεχής στο  $[1, +\infty]$  άρα η f  $\nearrow$  στο  $[1, +\infty]$ .

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

$$A_1 = [0, 1] \text{ η } f \searrow \text{ αρα } f(A_1) = [f(1), f(0)]$$

$$A_2 = (1, +\infty) \text{ η } f \nearrow \text{ αρα } f(A_2) = \left( \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0, f(0) = 1, f(1) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{αρα } f(A_1) = [0, 1]$$

$$\text{αρα } f(A_2) = (0, +\infty)$$

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [0, +\infty).$$

**B2.** η  $f'(x)$  παρ/μη στο  $(0, +\infty)$   $f''(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}} > 0$

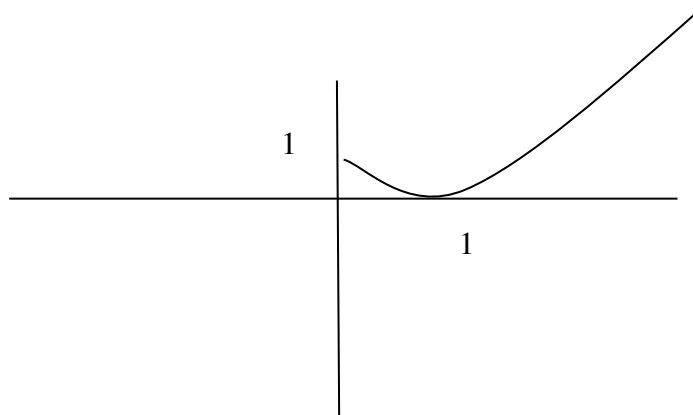
$$f''(x) > 0 \quad \forall x > 0 \text{ } f \text{ συνεχης αρα η } f \text{ κυρτη στο } [0, +\infty)$$

$f$  συνεχης στο  $[0, +\infty) \rightarrow$  αρα δεν κατ. ασυμπτωτες.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  αρα δεν οριζον. ασυμπτωτες.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = \lambda \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = -\infty \text{ αρα δεν πλαγιες ασυμπτωτες.}$$

**B3.**



**B4.**

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1 = \sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} - 1)^2$$

$$A_{f \circ f} = \{x \in A_f / f(x) \in A_f\} = [0, +\infty)$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in A_f \Leftrightarrow x \geq 0 \\ f(x) \in A_f \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \left( \sqrt{(\sqrt{x} - 1)^2} - 1 \right)^2 = \dots = x$$

**B5.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2026 \cdot (f \circ f)(x) \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2026x \ln x = 2026 \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 2026 \cdot 0 = 0$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = 0$$

### ΘΕΜΑ Γ :

#### Γ1.

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu x$ .

Για κάθε  $x \neq 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$  είναι  $f'(x) > 0$  κι επειδή η  $f$  είναι συνεχής είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Η  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $h'(x) = -\eta\mu x - 1 = -(\eta\mu x + 1)$ .

Για κάθε  $x \neq 2\kappa\pi - \frac{3\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$  είναι  $h'(x) < 0$  κι επειδή η  $h$  είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Παρατηρούμε ότι  $f(0) = 0 = h(0)$ .

Για κάθε  $x < 0$  είναι  $f(x) < f(0) = 0$  και  $h(x) > h(0) = 0$

Για κάθε  $x > 0$  είναι  $f(x) > f(0) = 0$  και  $h(x) < h(0) = 0$

#### Γ2.

Πρέπει να είναι  $f(x) = h(x) \Leftrightarrow 2x + 1 = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \Leftrightarrow x = 0$  διότι είναι για κάθε  $x < 0$   $f(x) < 0 < h(x)$  και για  $x > 0$  είναι  $f(x) > 0 > h(x)$ .

#### Γ3.

Έστω  $M(x_0, f(x_0))$  το σημείο της  $C_f$  με  $x_0 \in (\pi, 2\pi)$ . Η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $M$  είναι η ευθεία  $\varepsilon$  με εξίσωση :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - (x_0 - \eta\mu x_0) = (1 - \sigma\upsilon\nu x_0)(x - x_0)$$

Για να διέρχεται η  $\varepsilon$  από το σημείο A της εκφώνησης πρέπει :

$$1 - (x_0 - \eta\mu x_0) = (1 - \sigma\upsilon\nu x_0)(-x_0) \Leftrightarrow 1 - x_0 + \eta\mu x_0 = -x_0 + x_0\sigma\upsilon\nu x_0 \Leftrightarrow 1 + \eta\mu x_0 - x_0\sigma\upsilon\nu x_0 = 0$$

Έστω συνάρτηση  $\varphi(x) = 1 + \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x$ ,  $x \in [\pi, 2\pi]$

Η  $\varphi$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(\pi, 2\pi)$  με  $\varphi'(x) = \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x = x\eta\mu x$ .

Για κάθε  $x \in (\pi, 2\pi)$  είναι  $\eta\mu x < 0 \Rightarrow \varphi'(x) < 0$  και επειδή η  $\varphi$  είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[\pi, 2\pi]$ .

$$\text{Είναι } \varphi(\pi) = 1 + \eta\mu\pi - \pi\sigma\upsilon\nu\pi = 1 + 0 - \pi(-1) = 1 + \pi > 0$$

$$\varphi(2\pi) = 1 + \eta\mu 2\pi - 2\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi = 1 + 0 - 2\pi = 1 - 2\pi < 0$$

Άρα  $\varphi(\pi) \cdot \varphi(2\pi) < 0$  και επειδή η  $\varphi$  είναι συνεχής, λόγω του Θ. Bolzano υπάρχει  $x_0 \in (\pi, 2\pi)$  τέτοιο ώστε  $\varphi(x_0) = 0$ . Επειδή η  $\varphi$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[\pi, 2\pi]$ , το  $x_0$  είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης  $\varphi(x) = 0$ .

**Γ4.**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - x - 1}{x - \eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} - 1}{1 - \frac{\eta\mu x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \left( \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} - 1 \right) \frac{1}{1 - \frac{\eta\mu x}{x}} \right] = (-1)(+\infty) = -\infty$$

$$\text{Γιατί } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 1 - \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 0 \text{ και } 1 - \frac{\eta\mu x}{x} = \frac{x - \eta\mu x}{x} = \frac{f(x)}{x} > 0$$

**Γ5.**

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[x, x+1]$ ,  $x \in (0, \pi - 1)$  και παραγωγίσιμη στο  $(x, x+1)$  με  $f'(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu x$ .

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει  $\xi \in (x, x+1)$  τέτοιο ώστε :

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} \Leftrightarrow 1 - \sigma\upsilon\nu \xi = x+1 - \eta\mu(x+1) - x + \eta\mu x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \xi = \eta\mu(x+1) - \eta\mu x \end{aligned}$$

Είναι

$$x < \xi < x+1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x > \sigma\upsilon\nu \xi > \sigma\upsilon\nu(x+1) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(x+1) < \eta\mu(x+1) - \eta\mu x < \sigma\upsilon\nu x$$

### ΘΕΜΑ Δ :

**Δ<sub>1</sub>.**

$$x = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta - 1 = \sigma\upsilon\nu 2\theta \quad \text{και} \quad y = \eta\mu 2\theta$$

$$x^2 + y^2 = \sigma\upsilon\nu^2 2\theta + \eta\mu^2 2\theta = 1$$

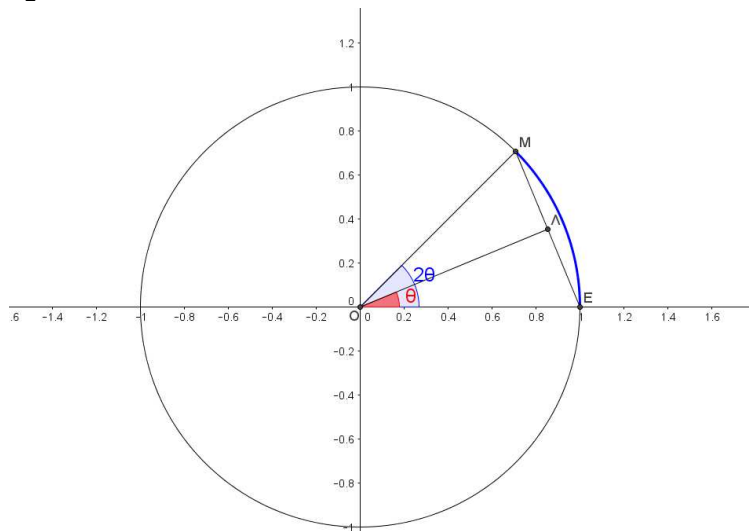
Άρα το σημείο M κινείται στον μοναδιαίο κύκλο  $x^2 + y^2 = 1$ .

Αφού τα σημεία M, A, Δ είναι συνευθειακά:

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A\Delta}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \sigma\upsilon\nu 2\theta & \eta\mu 2\theta - \frac{1}{2} \\ x & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2\theta - x(\eta\mu 2\theta - \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2\theta}{\eta\mu 2\theta - \frac{1}{2}} = \frac{\sigma\upsilon\nu 2\theta}{1 - 2\eta\mu 2\theta}$$

**Δ<sub>2</sub>.**



$$\ell_{\widehat{ME}} = \rho \cdot \theta = 1 \cdot \theta = \theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \quad (\text{όπου } \rho \text{ η ακτίνα του κύκλου και } \theta \text{ η γωνία σε}$$

rad)

$$\eta\mu \theta = \frac{\Lambda E}{O E} \Rightarrow \eta\mu \frac{\pi}{8} = \frac{\Lambda E}{1} \Rightarrow \Lambda E = \eta\mu \frac{\pi}{8} \Rightarrow M E = 2\eta\mu \frac{\pi}{8}$$

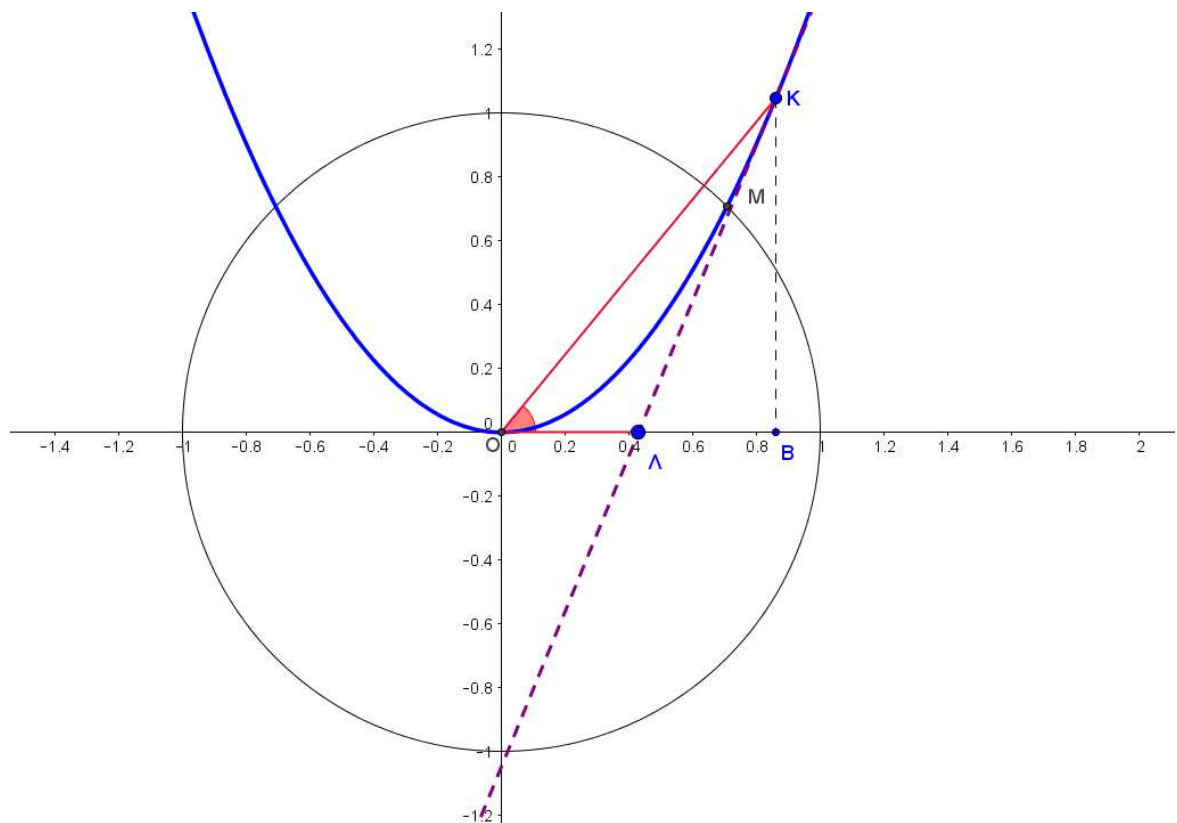
**Δ3.**

$$x(t) = \frac{\sigma\upsilon\nu 2\theta(t)}{1 - 2\eta\mu 2\theta(t)} \quad \text{και} \quad \theta'(t) = 2$$

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{-2\eta\mu(2\theta(t))[1 - 2\eta\mu(2\theta(t))] - 4\sigma\upsilon\nu^2(2\theta(t))}{(1 - 2\eta\mu(2\theta(t)))^2} \cdot \theta'(t) = \\ &= \frac{-2\eta\mu(2\theta(t))[1 - 2\eta\mu(2\theta(t))] - 4\sigma\upsilon\nu^2(2\theta(t))}{(1 - 2\eta\mu(2\theta(t)))^2} \cdot 2 \end{aligned}$$

$$\text{Για } t=t_0 \quad \theta(t_0) = \frac{\pi}{8}, \quad \text{άρα} \quad x(t_0) = \frac{-2\eta\mu \frac{\pi}{4} [1 - 2\eta\mu \frac{\pi}{4}] - 4\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{4}}{\left(1 - 2\eta\mu \frac{\pi}{4}\right)^2} \cdot 2 = -\frac{2\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}}$$

**Δ4.**



**α.** Τη χρονική στιγμή του ερωτήματος Γ<sub>3</sub>,  $\theta = \frac{\pi}{8} \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\text{άρα } M\left(\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4}, \eta\mu \frac{\pi}{4}\right), \quad M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$y = ax^2 \Rightarrow \sqrt{2} = a(\sqrt{2})^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$  και επομένως η παραβολή έχει εξίσωση  $y = \sqrt{2}x^2$ .

Αν  $x(t)$  η τετμημένη του σημείου Κ, τότε  $x(t)$  είναι και η τετμημένη της προβολής του

στον  $x'$ . Το Β απομακρύνεται από το  $O(0,0)$  με ρυθμό  $\sqrt{2}$  m/sec, άρα  $x'(t)=2$

και την χρονική στιγμή  $t_0$  η τετμημένη του Κ είναι  $2\sqrt{2}$ ,

δηλαδή  $x(t_0) = 2\sqrt{2}$  και  $x'(t_0) = 2$ .

Έστω  $f(x) = \sqrt{2}x^2$ ,  $f'(x) = 2\sqrt{2}x$ , τότε η εφαπτομένη στο σημείο  $M(x, f(x))$

θα έχει εξίσωση  $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - \sqrt{2}x_0^2 = 2\sqrt{2}x_0(x - x_0)$

Για  $y = 0$ ,  $x = \frac{-\sqrt{2}x_0^2 + 2\sqrt{2}x_0^2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}x_0^2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}x_0^2$ , άρα  $\Lambda(\frac{1}{2}x_0^2, 0)$

$(O\Lambda) = \left| \frac{1}{2}x_0^2 \right| = \frac{1}{2}x_0^2$  και  $\left( \frac{1}{2}x^2(t) \right)' = x(t) \cdot x'(t)$ , άρα τη χρονική στιγμή  $t_0$

$(O\Lambda)' = x(t_0) \cdot x'(t_0) = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4 \text{ m/sec}$

**β.**

$$\varepsilon\varphi(\theta(t)) = \frac{KB}{OB} = \frac{\sqrt{2}x^2(t)}{x(t)} = \sqrt{2}x(t) \Rightarrow \frac{\theta'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2(t)} = \sqrt{2}x'(t) = 4\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\theta'(t) = 4\sigma\upsilon\nu^2(t) = 4(\varepsilon\varphi^2(t) + 1) = 4\left(\left(\frac{BK}{OB}\right)^2 + 1\right) = 4\left(\left(\frac{8\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 1\right) = 68 \text{ rad/sec}$$