

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Εστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

A2. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f ;

A3. Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός :

« Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν παρουσιάζουν ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.»

Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό ως *Αληθή ή Ψευδή* (μονάδα 1) και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (μονάδες 3)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε ισχύει ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx = 0.$$

2. Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ με

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx, \text{ τότε } f(x) = g(x) \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

3. Αν συνάρτηση f είναι κυρτή και δυο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , τότε $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
4. Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f , μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f .
5. Αν για μια συνάρτηση f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[\alpha, \beta]$, τότε εφαρμόζεται και το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο ίδιο διάστημα.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 3}, x \in \mathbb{R}$.

B1. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της f .

B2. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $0 < f(x) < 2$

B3. Να βρείτε την κυρτότητα της f και να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(\ln 3, 1)$ διαπερνά τη γραφική παράσταση της f .

B4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f και να υπολογίσετε το εμβαδό που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τους άξονες xx' , yy' και την ευθεία $x = \ln 3$.

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 6x(\ln x - 2) + 2, x > 0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο.

Γ2. Αν x_0 η θέση ελαχίστου της f , να αποδείξετε ότι $x_0 \in (1, 2)$.

Γ3. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x(x^2 + 6 \ln x) = 2(6x - 1)$.

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη Cf, τον άξονα xx' και τις ευθείες $x=1, x=2$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύει :

$$f'(x)(f(x)+1) = e^{-f(x)} \text{ για κάθε } x \geq 0 \text{ και } f(0) = 0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = xe^{-f(x)}$ για κάθε $x \geq 0$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της στο $x_0 = 0$ και την ευθεία $x = \lambda e^\lambda$.

Δ5. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.