ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 06.06.2023

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ</u>

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 111

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 104

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 128

Α4.

α) Λ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$\mathrm{A}_{goh} = \left\{ x \in A_h \mid h(x) \in A_g \right\} = (0, +\infty)$$

$$(goh)(x) = g\left(h(x)\right) = \frac{4 - e^{2\ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - e^{\ln x^2}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - x^2}{x}$$

Β2.

i. $$f'(x) = \frac{\left(4 - x^2\right)' x - (x)'\left(4 - x^2\right)}{x^2} = \frac{-2x \cdot x - \left(4 - x^2\right)}{x^2} = \frac{-x^2 - 4}{x^2} < 0$$

Άρα $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow \ \sigma\tau o \ (0, +\infty)$

ii. $$e < \pi \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(e) > f(\pi) \Leftrightarrow \frac{4 - e^2}{e} > \frac{4 - \pi^2}{\pi} \Leftrightarrow \pi\left(4 - e^2\right) > e\left(4 - \pi^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \frac{\pi}{e}$$

B3.

Για κατακόρυφες :

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{4-x^2}{x} \overset{\frac{4}{0^+}}{=} +\infty$ άρα η x=0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Για οριζόντιες/πλάγιες :

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{4-x^2}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4-x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x)-\lambda x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4-x^2}{x}+x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4-x^2+x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 0$$

Άρα η $y=-x$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

B4.

$$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)}\right| = \frac{\left|\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)\right|}{\left|f(x)\right|} \le \frac{1}{\left|f(x)\right|}$$

Άρα

$$-\frac{1}{\left|f(x)\right|} \le \frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)} \le \frac{1}{\left|f(x)\right|} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{\left|f(x)\right|}\right) \le \lim_{x\to+\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)} \le \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left|f(x)\right|}$$

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{\left|f(x)\right|}\right) = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\left|f(x)\right|}\right) = 0$

Άρα από το Κριτήριο Παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)} = 0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$\int_2^3 xf(x)dx = \int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)dx = \int_2^3 (1+\alpha x)dx = \left[x+\alpha\frac{x^2}{2}\right]_2^3 = 3+\alpha\frac{9}{2}-2-2\alpha = 1+\frac{5\alpha}{2}$$

$$\int_2^3 xf(x)dx = 1 \Rightarrow 1+\frac{5\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = 0.$$

Γ2.

i) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = -1$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1-x}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)}{x(x-1)} = -1$

Τα πλευρικά όρια είναι ίσα, άρα η f παραγωγίζεται στο $x_0=1$, με $f'(1)=-1$ και ορίζεται η εφαπτομένη στο σημείο (1,f(1)).

ii) ε: $y-f(1)=f'(1)(x-1) \Rightarrow y-1=-(x-1) \Rightarrow y=-x+2$

Έστω ότι η ευθεία (ε) σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x΄x, με $0 \le \theta < \pi$

$\lambda_\varepsilon = f'(1) = \varepsilon\varphi\theta \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = -1 \Rightarrow \theta = 135^o$.

Γ3.

Για x<1 $f(x)=x^2-3x+3$, $f'(x)=2x-3 < 0$ για x<1

Για x>1 $f(x)=\frac{1}{x}$, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$ για $x>1$

$f'(1)=-1 < 0$

Τελικά $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και 1 - 1.

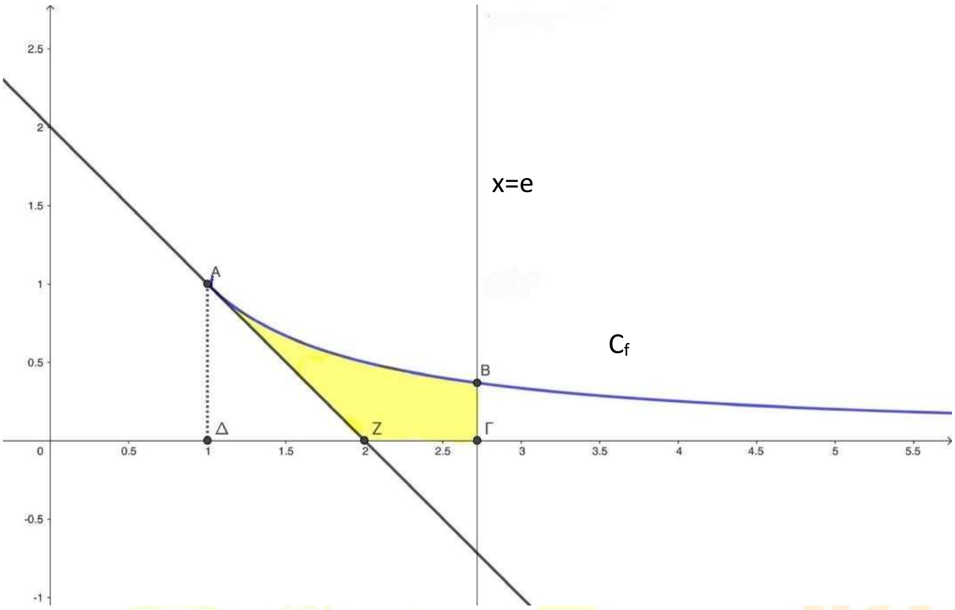
A= $(-\infty,+\infty)$

$$f(A) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) = (0,+\infty)$$

γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-3x+3) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^2) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0.$

Γ4.



Σημείο τομής της ευθείας (ε) με x΄x: $y \overset{\varepsilon}{=} -x+2 \overset{y=0}{\Rightarrow} x=2$

Σημείο τομής της ευθείας (ε) με f, A(1,1) (Το σημείο επαφής)

$$E=\int_1^e f(x)dx-\int_1^2(-x+2)dx=\int_1^e \frac{1}{x}dx-\left[-\frac{x^2}{2}+2x\right]_1^2=\left[\ln|x|\right]_1^e-(-2+4+\frac{1}{2}-2)=$$

$$\ln e-\ln 1-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Θέτουμε συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)-2x}{x-1}$ με $x\in(0,1)\cup(1,2)$

Άρα $f(x)=g(x)(x-1)+2x \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[g(x)(x-1)+2x\right]=0+2=2$

Επομένως και $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\ln 1-\dfrac{1}{1}+\kappa=-1+\kappa$

$-1+\kappa=2 \Leftrightarrow \kappa=3$

Δ2.

Έχουμε για κάθε $x \in (0,2)$ με f συνεχή

$$f'(x) = \left[\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right]' = \frac{-1}{2-x} + \frac{1}{x^2} = \frac{-(x^2+x-2)}{x^2(2-x)}$$

Άρα

x	0	1	2
$f'(x)$	+	-	
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	

Η f γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $A_1 = (0,1]$ οπότε

$$f(A_1) = f((0,1]) = \left(\lim_{x\to 0^+} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 2]$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $A_2 = (1,2)$ οπότε

$$f(A_2) = f((0,2)) = \left(\lim_{x\to 2^-} f(x), \lim_{x\to 1^+}\right) = (-\infty, 2)$$

Άρα το $0 \in f(A_1)$ άρα υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ *τέτοιο ώστε* $f(x_1) = 0$ και

$0 \in f(A_2)$ άρα υπάρχει $x_2 \in (1,2)$ *τέτοιο ώστε* $f(x_2) = 0$

$$x_1 < \frac{1}{3} \underset{x\in(0,1)}{\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}} f(x_1) < f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 0 < \ln\frac{5}{3} \text{ που ισχύει}$$

Δ3.

Εφαρμόζουμε Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$

Η f συνεχής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$ ως πράξεις συνεχών

Η f παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right)$ τέτοιο ώστε να ισχύει :

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1-3x_1}{3}} = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

Για την μοναδικότητα έχουμε :

$f''(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3} < 0$ άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα οπότε το ξ είναι μοναδικό.

Δ4.

i. Αφού η F και G είναι αρχικές της f, τότε θα έχουμε ότι :

$F'(x) = f(x) \ \kappa\alpha\iota \ G'(x) = f(x)$ επομένως θα ισχύει :

$F'(x) = G'(x) \Leftrightarrow F(x) = G(x) + c$ για $x \in (0,2)$

Για $x = x_1$ $F(x_1) = G(x_1) + c \Leftrightarrow G(x_1) + c = 0 \Leftrightarrow G(x_1) = -c \ (1)$

Για $x = x_2$ $F(x_2) = G(x_2) + c \Leftrightarrow F(x_2) = c(2)$

Προσθέτοντας τις (1) , (2) κατά μέλη βγαίνει το ζητούμενο.

ii. Έχουμε από το προηγούμενο θεώρημα πως : $F(x_1) = G(x_1) + c$ και $G(x_1) = -c$

Άρα έχουμε ότι $F(x) = G(x) - G(x_1)$

Θεωρούμε συνάρτηση

$$\varphi(x) = x_1 F(x) + x_2 G(x) - x_1 - x_2 + 2x \Leftrightarrow$$
$$\varphi(x) = x_1\left(G(x) - G(x_1)\right) - x_1 - x_2 + 2x$$

Θα εφαρμόσουμε Bolzano στο $[x_1, x_2]$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0$

Η φ συνεχής ως πράξη συνεχών

$\varphi(x_1)=x_2G(x_1)+x_1-x_2$

$\varphi(x_2)=-x_1G(x_1)+x_2-x_1$

Στο (x_1,x_2) ξέρουμε ότι το $f((x_1,x_2))=(0,2)$ άρα η $f(x)>0$

Αφού $f(x)>0 \Leftrightarrow F'(x)>0$ και $G'(x)>0$

Άρα θα είναι $F\nearrow$ καθώς και $G\nearrow$

Για $x_1<x_2 \overset{G\nearrow}{\Leftrightarrow} G(x_1)<G(x_2) \Leftrightarrow G(x_1)<0$ αφού $G(x_2)=0$

Άρα τελικά $\varphi(x_1)<0$ και $\varphi(x_2)>0$

Ισχύει το Bolzano άρα υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (x_1,x_2).

Αφού $\varphi(x)=x_1F(x)+x_2G(x)-x_1-x_2+2x$ τότε

$\varphi'(x)=x_1F'(x)+x_2G'(x)+2=x_1f(x)+x_2f(x)+2=(x_1+x_2)f(x)+2$

Αφού $f(x)>0$ άρα και $\varphi'(x)>0 \Rightarrow \varphi\nearrow$ άρα η λύση είναι μοναδική.