

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ Α:

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 76

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 129

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 144

- A4.** 1. Σωστό
2. Λάθος
3. Λάθος
4. Λάθος
5. Σωστό

ΘΕΜΑ Β :

B1. η f παρ/μη στο $(0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0,1)$$

Η f συνεχής στο $[0,1]$ άρα η $f \searrow$ στο $[0,1]$.

Η f συνεχής στο $[1, +\infty]$ άρα η $f \nearrow$ στο $[1, +\infty]$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

$$A_1 = [0, 1] \text{ η } f \searrow \text{ αρα } f(A_1) = [f(1), f(0)]$$

$$A_2 = (1, +\infty) \text{ η } f \nearrow \text{ αρα } f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0, f(0) = 1, f(1) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{αρα } f(A_1) = [0, 1]$$

$$\text{αρα } f(A_2) = (0, +\infty)$$

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [0, +\infty).$$

$$\mathbf{B2.} \eta \ f'(x) \text{ παρ/μη στο } (0, +\infty) \ f''(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}} > 0$$

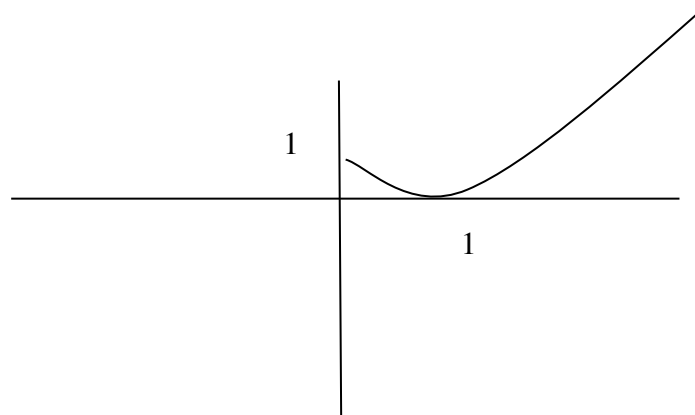
$$f''(x) > 0 \quad \forall x > 0 \text{ f συνεχης αρα η f κυρτη στο } [0, +\infty)$$

$$f \text{ συνεχης στο } [0, +\infty) \rightarrow \text{αρα δεν κατ.ασυμπτωτες.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ αρα δεν οριζον. ασυμπτωτες.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = \lambda \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = -\infty \text{ αρα δεν πλαγιες ασυμπτωτες.}$$

B3.



B4.

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1 = \sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} - 1)^2$$

$$A_{f \circ f} = \{x \in A_f / f(x) \in A_f\} = [0, +\infty)$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in A_f \Leftrightarrow x \geq 0 \\ f(x) \in A_f \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \left(\sqrt{(\sqrt{x} - 1)^2} - 1 \right)^2 = \dots = x$$

B5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2023(f \circ f)(x) \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2023x \ln x = 2023 \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 2023 \cdot 0 = 0$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = 0$$

ΘΕΜΑ Γ :

Γ1.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 1 - \sin x$.

Για κάθε $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ είναι $f'(x) > 0$ κι επειδή η f είναι συνεχής είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = -\eta\mu x - 1 = -(\eta\mu x + 1)$.

Για κάθε $x \neq 2k\pi - \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ είναι $h'(x) < 0$ κι επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $f(0) = 0 = h(0)$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $f(x) < f(0) = 0$ και $h(x) > h(0) = 0$

Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > f(0) = 0$ και $h(x) < h(0) = 0$

Γ2.

Πρέπει να είναι $f(x) = h(x) \Leftrightarrow 2x + 1 = \sin x + \eta\mu x \Leftrightarrow x = 0$ διότι είναι για κάθε $x < 0$ $f(x) < 0 < h(x)$ και για $x > 0$ είναι $f(x) > 0 > h(x)$.

Γ3.

Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο της C_f με $x_0 \in (\pi, 2\pi)$. Η εφαπτομένη της C_f στο M είναι η ευθεία ε με εξίσωση :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - (x_0 - \eta\mu x_0) = (1 - \sin x_0)(x - x_0)$$

Για να διέρχεται η ε από το σημείο A της εκφώνησης πρέπει :

$$1 - (x_0 - \eta \mu x_0) = (1 - \sigma \upsilon \nu x_0)(-x_0) \Leftrightarrow 1 - x_0 + \eta \mu x_0 = -x_0 + x_0 \sigma \upsilon \nu x_0 \Leftrightarrow 1 + \eta \mu x_0 - x_0 \sigma \upsilon \nu x_0 = 0$$

Έστω συνάρτηση $\varphi(x) = 1 + \eta \mu x - x \sigma \upsilon \nu x$, $x \in [\pi, 2\pi]$

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(\pi, 2\pi)$ με $\varphi'(x) = \sigma \upsilon \nu x - \sigma \upsilon \nu x + x \eta \mu x = x \eta \mu x$.

Για κάθε $x \in (\pi, 2\pi)$ είναι $\eta \mu x < 0 \Rightarrow \varphi'(x) < 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\pi, 2\pi]$.

$$\text{Είναι } \varphi(\pi) = 1 + \eta \mu \pi - \pi \sigma \upsilon \nu \pi = 1 + 0 - \pi(-1) = 1 + \pi > 0$$

$$\varphi(2\pi) = 1 + \eta \mu 2\pi - 2\pi \sigma \upsilon \nu 2\pi = 1 + 0 - 2\pi = 1 - 2\pi < 0$$

Άρα $\varphi(\pi) \cdot \varphi(2\pi) < 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής, λόγω του Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (\pi, 2\pi)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = 0$. Επειδή η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\pi, 2\pi]$, το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\varphi(x) = 0$.

Γ4.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma \upsilon \nu x - x - 1}{x - \eta \mu x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x} - 1}{1 - \frac{\eta \mu x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(\frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x} - 1 \right) \frac{1}{1 - \frac{\eta \mu x}{x}} \right] = (-1)(+\infty) = -\infty$$

$$\text{Γιατί } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{\eta \mu x}{x} \right) = 0 \text{ και } 1 - \frac{\eta \mu x}{x} = \frac{x - \eta \mu x}{x} = \frac{f(x)}{x} > 0$$

Γ5.

Η f είναι συνεχής στο $[x, x+1]$, $x \in (0, \pi-1)$ και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$ με $f'(x) = 1 - \sigma \upsilon \nu x$.

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε :

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} \Leftrightarrow 1 - \sigma \upsilon \nu \xi = x+1 - \eta \mu(x+1) - x + \eta \mu x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sigma \upsilon \nu \xi = \eta \mu(x+1) - \eta \mu x \end{aligned}$$

Είναι

$$x < \xi < x+1 \Leftrightarrow \sin x > \sin \xi > \sin(x+1) \Leftrightarrow \sin(x+1) < \eta \mu(x+1) - \eta \mu x < \sin x$$

ΘΕΜΑ Δ :

Δ₁.

$$x = 2\sin^2\theta - 1 = \sin 2\theta \quad \text{και} \quad y = \eta \mu 2\theta$$

$$x^2 + y^2 = \sin^2 2\theta + \eta \mu^2 2\theta = 1$$

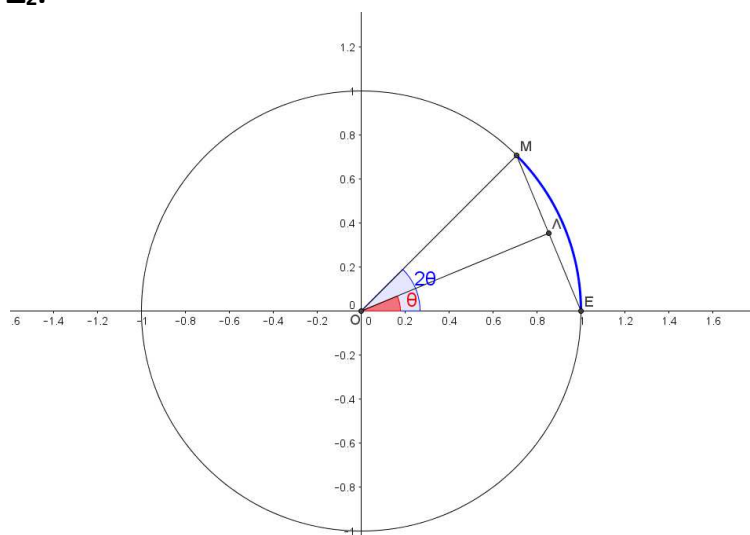
Άρα το σημείο M κινείται στον μοναδιαίο κύκλο $x^2 + y^2 = 1$.

Αφού τα σημεία M, A, Δ είναι συνευθειακά:

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A\Delta}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \sin 2\theta & \eta \mu 2\theta - \frac{1}{2} \\ x & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \sin 2\theta - x(\eta \mu 2\theta - \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-\frac{1}{2} \sin 2\theta}{\eta \mu 2\theta - \frac{1}{2}} = \frac{\sin 2\theta}{1 - 2\eta \mu 2\theta}$$

Δ₂.



$$\ell_{\widehat{ME}} = \rho \cdot \theta = 1 \cdot \theta = \theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \quad (\text{όπου } \rho \text{ η ακτίνα του κύκλου και } \theta \text{ η γωνία σε}$$

rad)

$$\eta \mu \theta = \frac{\Lambda E}{O E} \Rightarrow \eta \mu \frac{\pi}{8} = \frac{\Lambda E}{1} \Rightarrow \Lambda E = \eta \mu \frac{\pi}{8} \Rightarrow M E = 2\eta \mu \frac{\pi}{8}$$

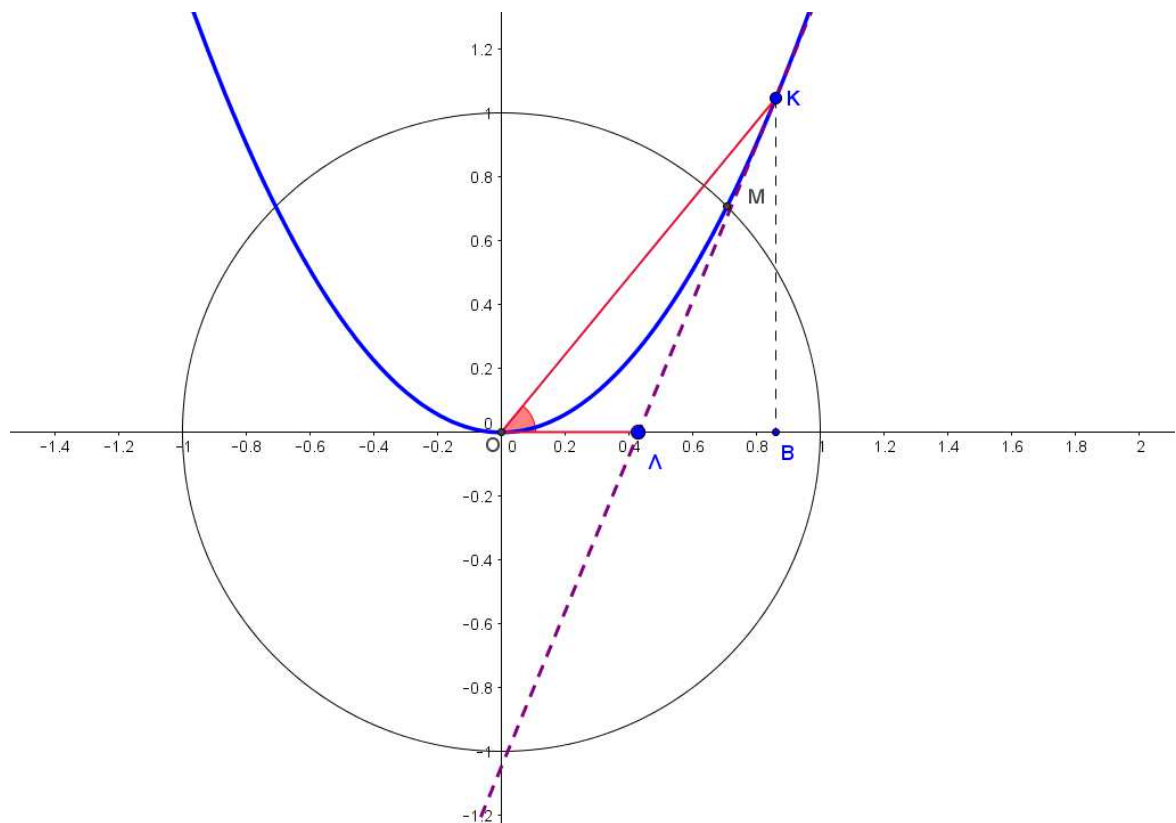
Δ₃.

$$x(t) = \frac{\sin 2\theta(t)}{1 - 2\eta\mu 2\theta(t)} \quad \text{και} \quad \theta'(t) = 2$$

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{-2\eta\mu(2\theta(t))[1 - 2\eta\mu(2\theta(t))] - 4\sin^2(2\theta(t))}{(1 - 2\eta\mu(2\theta(t)))^2} \cdot \theta'(t) = \\ &= \frac{-2\eta\mu(2\theta(t))[1 - 2\eta\mu(2\theta(t))] - 4\sin^2(2\theta(t))}{(1 - 2\eta\mu(2\theta(t)))^2} \cdot 2 \end{aligned}$$

$$\text{Για } t=t_0 \quad \theta(t_0) = \frac{\pi}{8}, \quad \text{άρα} \quad x(t_0) = \frac{-2\eta\mu \frac{\pi}{4} [1 - 2\eta\mu \frac{\pi}{4}] - 4\sin^2 \frac{\pi}{4}}{\left(1 - 2\eta\mu \frac{\pi}{4}\right)^2} \cdot 2 = -\frac{2\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}}$$

Δ4.



α. Τη χρονική στιγμή του ερωτήματος Γ₃, $\theta = \frac{\pi}{8} \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\text{άρα } M\left(\sin \frac{\pi}{4}, \eta\mu \frac{\pi}{4}\right), \quad M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$y = \alpha x^2 \Rightarrow \sqrt{2} = \alpha(\sqrt{2})^2 \Rightarrow \alpha = \sqrt{2}$ και επομένως η παραβολή έχει εξίσωση $y = \sqrt{2}x^2$.

Αν $x(t)$ η τετμημένη του σημείου Κ, τότε $x(t)$ είναι και η τετμημένη της προβολής του

στον $x'x$. Το Β απομακρύνεται από το $O(0,0)$ με ρυθμό $\sqrt{2}$ m/sec, άρα $x'(t)=2$

και την χρονική στιγμή t_0 η τετμημένη του Κ είναι $2\sqrt{2}$,

δηλαδή $x(t_0)=2\sqrt{2}$ και $x'(t_0)=2$.

Έστω $f(x)=\sqrt{2}x^2$, $f'(x)=2\sqrt{2}x$, τότε η εφαπτομένη στο σημείο $M(x, f(x))$

θα έχει εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - \sqrt{2}x_0^2 = 2\sqrt{2}x_0(x - x_0)$

Για $y=0$, $x = \frac{-\sqrt{2}x_0^2 + 2\sqrt{2}x_0^2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}x_0^2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}x_0^2$, άρα $\Lambda(\frac{1}{2}x_0^2, 0)$

$(O\Lambda) = \left| \frac{1}{2}x_0^2 \right| = \frac{1}{2}x_0^2$ και $\left(\frac{1}{2}x^2(t) \right)' = x(t) \cdot x'(t)$, άρα τη χρονική στιγμή t_0

$(O\Lambda)' = x(t_0) \cdot x'(t_0) = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4 \text{ m/sec}$

β.

$$\varepsilon\varphi(\theta(t)) = \frac{KB}{OB} = \frac{\sqrt{2}x^2(t)}{x(t)} = \sqrt{2}x(t) \Rightarrow \frac{\theta'(t)}{\sin^2(t)} = \sqrt{2}x'(t) = 4\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\theta'(t) = 4\sin^2(t) = 4(\varepsilon\varphi^2(t) + 1) = 4\left(\left(\frac{BK}{OB}\right)^2 + 1\right) = 4\left(\left(\frac{8\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 1\right) = 68 \text{ rad/sec}$$