

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών .

A2. Να γράψετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού.

A3. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν ισχύει $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) τότε να δείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

A4.

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **ΛΑΘΟΣ** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει $|\eta\mu x| < |x|$, για κάθε $x \in \mathbf{R}^*$

β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$ και ισχύει

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma\omega^2 x}$$

γ) Έστω f συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$ τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

δ) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν $f'(x_0) = 0$ τότε η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 .

ε) Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A . Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με **$f(A)$** . Είναι δηλαδή:

$$f(A) = \{ y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A \}.$$

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1, x \geq 0$

B1. Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της

B2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να εξετάσετε αν έχει ασύμπτωτες

B3. Με βάση τα β_1 και β_2 να σχεδιάσετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της f

B4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0,1]$ $(f \circ f)(x) = x$.

B5. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} [2023 \cdot (f \circ f)(x) \ln x]$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x - \eta \mu x \quad \text{και} \quad h(x) = \sigma \upsilon \nu x - x - 1, x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να βρείτε το πρόσημο των f, h .

Γ2. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_h

Γ3. Να δείξετε ότι η C_f δέχεται μοναδική εφαπτομένη στο $(\pi, 2\pi)$ που να διέρχεται από το $A(0,1)$.

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{h(x)}$

Γ5. Να δείξετε ότι $\sin(x+1) < \eta\mu(x+1) - \eta\mu x < \sin x$ για κάθε $x \in (0, \pi-1)$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα συνευθειακά σημεία M, A, Δ με $M(2\sin^2\theta - 1, \eta\mu 2\theta)$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$,

$A\left(0, \frac{1}{2}\right)$, και σημείο Δ του άξονα x'x.

Δ₁. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του σημείου M και να αποδείξετε ότι η τετμημένη

$$\text{του } \Delta \text{ είναι ίση με } x = \frac{\sin 2\theta}{1 - 2\eta\mu 2\theta}.$$

Δ₂. Αν το τόξο $\widehat{ME}$ με $E(1,0)$ έχει μήκος $\ell = \frac{\pi}{4}$ να δείξετε ότι $(ME) = 2\eta\mu \frac{\pi}{8}$.

Δ₃. Αν η γωνία θ αυξάνει με ρυθμό 2 rad/sec, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της

$$\text{τετμημένης του σημείου M, τη χρονική στιγμή που η γωνία } \theta(t) = \frac{\pi}{8}.$$

Δ₄. Ένα σώμα K κινείται στην καμπύλη C: $y = a \cdot x^2$, $x \geq 0$ και έστω B η προβολή του K στον άξονα Ox. Δίνεται ότι η καμπύλη C διέρχεται από το σημείο M τη χρονική στιγμή του ερωτήματος Γ₃ και το B απομακρύνεται από το O(0,0) με ρυθμό $\sqrt{2}$ m/sec. Τη στιγμή που η τετμημένη του K είναι $2\sqrt{2}$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής:

α. της απόστασης (ΟΛ), όπου Λ το σημείο τομής της εφαπτομένης της καμπύλης C

στο K, με τον άξονα x'x.

β. της γωνίας $\angle \hat{OK}$.