ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΤΑΞΗ: …………Γ ΛΥΚΕΙΟΥ……….
ΜΑΘΗΜΑ:………ΜΑΘ. ΠΡΟΣ.……

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ Α:

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 116

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 74

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 35

Α4. **1. Λάθος**
2. Σωστό
3. Λάθος
4. Λάθος
5. Λάθος

ΘΕΜΑ Β :

Β1. Για $x<0$ η f είναι συνεχής ως πράξη συνεχών.
Για $x>0$ η f είναι συνεχής ως πράξη συνεχών.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(2\eta\mu^3 x + x + 1\right) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(2x^2 + x + 1\right) = 1$$

Άρα αφού τα πλευρικά είναι ίσα, άρα ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

Επίσης $f(0) = 2\cdot 0^2 + 0 + 1 = 1$. Επομένως ισχύει και $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$

Η f συνεχής και στο 0. Άρα η f τελικά συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

B2. Για την παραγωγισιμότητα:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\eta\mu^3 x+x+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\eta\mu^3 x+x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2\eta\mu^3 x}{x}+\frac{x}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2\eta\mu x\cdot\eta\mu^2 x}{x}+1\right)=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x^2+x+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cancel{x}(2x+1)}{\cancel{x}}=1$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και ισχύει $f'(0)=1$

B3. Θα εφαρμόσουμε Bolzano για την f στο διάστημα $[-\pi,0]$.

Η f συνεχής στο $[-\pi,0]$ ως πράξη συνεχών.

$$f(-\pi)=2\eta\mu(-\pi)+(-\pi)+1=-\pi+1<0$$
$$f(0)=2\cdot 0\ +0+1=1>0$$

Άρα $f(-\pi)\cdot f(0)<0$ Επομένως ισχύει το Θ. Bolzano .

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-\pi,0)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$.

B4. Για το κάθε ξεχωριστά :

i. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)x^3-2x^2+1}{x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)x\quad(1)$$

Για $x<0$ έχουμε : $f'(x)=\left(2\eta\mu^3 x+x+1\right)'=2\cdot 3\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu x+1=6\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu x+1$

Επομένως $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=6\eta\mu^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right)+1=0+1=1$

Άρα η (1) θα γίνει : $\lim_{x\to+\infty}f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)x=\lim_{x\to+\infty}1\cdot x=+\infty$

ii. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2023\cdot f'\left(\frac{1}{2}\right)\cdot x^3}{|x+1|}$

Για $x>0$ έχουμε : $f'(x)=\left(2x^2+x+1\right)'=4x+1$

Άρα $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=4\dfrac{1}{2}+1=3$

Επομένως $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2023\cdot f'\left(\frac{1}{2}\right)\cdot x^3}{|x+1|}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2023\cdot 3\cdot x^3}{|x+1|}=\dfrac{2023\cdot 3\cdot (-1)^3}{|-1+1|}=-\infty$

καθώς $|x+1|\geq 0$

B5.

Αφού $g(x)=\sqrt{x-1}$ με $D_g=[1,+\infty)$. Επίσης για $x>0$ έχουμε $D_f=(0,+\infty)$

$$D_{gof}=\left\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\right\}=\left\{x\in(0,+\infty) \mid 2x^2+x+1\in[1,+\infty)\right\}=$$

$$=\left\{x>0 \mid 2x^2+x\geq 0\right\}=\left\{x>0 \mid x(2x+1)\geq 0\right\}=\left\{x>0 \mid x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]U[0,+\infty)\right\}=(0,+\infty)$$

Για τον τύπο της έχουμε : $(gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{2x^2+x+1-1}=\sqrt{2x^2+x}$

Άρα $(gof)'(x)=\left(\sqrt{2x^2+x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{2x^2+x}}\cdot\left(2x^2+x\right)'=\dfrac{4x+1}{2\sqrt{2x^2+x}}$

ΘΕΜΑ Γ :

Γ1. Για x< 0 $f'(x)=-\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}<0$, άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

Για x< 0 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$, άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$.

$A_1=(-\infty,0],\quad A_2=(0,+\infty)$

$f(A_1)\overset{f\searrow}{=}[f(0),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x))=[\frac{1}{2},1)$ και $f(A_2)\overset{f\searrow}{=}(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to 0^+}f(x))=[0,+\infty)$

$$\left(\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}(1+e^x)=1,\text{ άρα }\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{1+e^x}=1,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\text{ και}\\ \lim\limits_{x\to 0^+}x=0\text{ με }x>0\text{ άρα }\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty\end{array}\right)$$

$f(A_1)\cap f(A_2)\neq\varnothing$ άρα η f δεν είναι συνάρτηση 1 προς 1 .

Γ2.

Για $x\in(-3,0],\ g(x)=e^x+1-\ln(x+3)$ και $g'(x)=e^x-\frac{1}{x+3}$.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ με $g'(x_0)=0$.

Η g' είναι συνεχής στο $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

$$g'(-1)=\frac{1}{e}-\frac{1}{2}=\frac{2-e}{2e}<0\text{ και } g'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{e}}-\frac{2}{5}=\frac{5-2\sqrt{e}}{5\sqrt{e}}>0$$

Άρα από θ.Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ με $g'(x_0)=0$.

$g''(x)=e^x+\frac{1}{(x+3)^2}>0$ άρα g' γνησίως αύξουσα και η ρίζα μοναδική.

Για $x>x_0\overset{g'\nearrow}{\Rightarrow}g'(x)>g'(x_0)\Rightarrow g'(x)>0$

Για $x<x_0\overset{g'\nearrow}{\Rightarrow}g'(x)<g'(x_0)\Rightarrow g'(x)<0$

Επομένως για x = x_0 η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $g(x_0)$.

$$g'(x_0)=0\Rightarrow e^{x_0}-\frac{1}{x_0+3}=0\Rightarrow e^{x_0}=\frac{1}{x_0+3}\Rightarrow x_0=\ln\frac{1}{x_0+3}=-\ln(x_0+3)$$

Τελικά $g(x_0)=e^{x_0}+1-\ln(x_0+3)=\frac{1}{x_0+3}+1+x_0=\frac{{x_0}^2+4x_0+4}{x_0+3}$.

Γ3.

$$\frac{f(\alpha)-f(2\alpha)+\alpha f'(\alpha)}{x+1}+\frac{1-(\alpha+1)f(\alpha)}{x+2}=0\Rightarrow$$

$(x+2)\big(f(\alpha)-f(2\alpha)+\alpha f'(\alpha)\big)+(x+1)\big(1-(\alpha+1)f(\alpha)\big)=0$

Θέτω $P(x)=(x+2)\big(f(\alpha)-f(2\alpha)+\alpha f'(\alpha)\big)+(x+1)\big(1-(\alpha+1)f(\alpha)\big)$

Η συνάρτηση P είναι συνεχής στο [-2, -1] ως πολυωνυμική 1ου βαθμού.

P(-2)=(α + 1)f(α) - 1και P(-1) = f(α) – f(2α) + αf΄(α)

$$e^{\alpha} > \alpha \Rightarrow 1+e^{\alpha} > \alpha+1 \overset{1+e^{\alpha}>0}{\Rightarrow} \frac{\alpha+1}{1+e^{\alpha}} < 1 \Rightarrow (\alpha+1)f(\alpha)-1<0 \Rightarrow P(-2)<0$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [2α, α] παραγωγίσιμη στο (2α, α), άρα από Θ.Μ.Τ.

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (2\alpha,\alpha)$ με $f'(\xi)=\dfrac{f(\alpha)-f(2\alpha)}{-\alpha}$, $\alpha<-1$

$$f''(x) = -\frac{e^x(1+e^x)-2e^xe^x}{(1+e^x)^4} = \frac{e^{2x}-e^x}{(1+e^x)^4} < 0 \text{ για } x\in(2\alpha,\alpha) \text{ δηλαδή για } x<0$$

επομένως η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2\alpha,\alpha]$.

$$\xi<\alpha \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(\xi)>f'(\alpha) \Rightarrow \frac{f(\alpha)-f(2\alpha)}{-\alpha} > f'(\alpha) \overset{-\alpha>0}{\Rightarrow} f(\alpha)-f(2\alpha) > -\alpha f'(\alpha) \Rightarrow$$

$f(\alpha)-f(2\alpha)+\alpha f'(\alpha)>0 \Rightarrow P'(-1)>0.$

Αφού $P(-2)P(-1)<0$ από θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(-2,-1)$ με $P(x_0)=0$, μοναδικό γιατί η συνάρτηση P είναιπολυωνυμική 1ου βαθμού.

Γ4.

$M(x,f(x))$ και x΄(t) = 2. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ και $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

Έστω $M(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής. Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Μ θα έχει εξίσωση:

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Rightarrow y-\dfrac{1}{x_0} = -\dfrac{1}{x_0^{\,2}}(x-x_0)$ και αφού την χρονική στιγμή t_0 διέρχεται από το Α(1,0) θα έχουμε ότι:

$$0-\frac{1}{x_0} = -\frac{1}{x_0^{\,2}}(1-x_0) \Rightarrow \frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_o^{\,2}} - \frac{1}{x_0} \Rightarrow \frac{2}{x_0} = \frac{1}{x_0^{\,2}} \overset{x_0>0}{\Rightarrow} 2x_0=1 \Rightarrow x_0=\frac{1}{2}$$

Το σημείο επαφής λοιπόν είναι το $M\left(\dfrac{1}{2},f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)=M\left(\dfrac{1}{2},2\right)$.

$$\ell=(OM)=\sqrt{x^2+f^2(x)}=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}, \text{ άρα } \ell(t)=\sqrt{x^2(t)+\frac{1}{x^2(t)}}$$

$$\ell'(t)=\frac{2x(t)x'(t)-\dfrac{2x(t)x'(t)}{x^4(t)}}{2\sqrt{x^2(t)+\dfrac{1}{x^2(t)}}} = \frac{x(t)x'(t)-\dfrac{2x'(t)}{x^3(t)}}{\sqrt{x^2(t)+\dfrac{1}{x^2(t)}}}$$

Την χρονική στιγμή t_0, $x'(t_0)=2$ και $x(t_0)=\dfrac{1}{2}$

$$\ell'(t_0)=\frac{x(t_0)x'(t_0)-\dfrac{2x'(t_0)}{x^3(t_0)}}{\sqrt{x^2(t_0)+\dfrac{1}{x^2(t_0)}}}=\frac{\dfrac{1}{2}\cdot 2-\dfrac{2\cdot 2}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^3}}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}}}=\frac{1-32}{\sqrt{\dfrac{1}{4}+8}}=\frac{-62}{\sqrt{33}}=-\frac{62\sqrt{33}}{33}\text{cm}/\text{s}$$

ΘΕΜΑ Δ :

Δ1

$$f^3(x)+f(x)=x+1\overset{x=-1}{\Rightarrow}f^3(-1)+f(-1)=0\Rightarrow f(-1)\left(f^2(-1)+1\right)=0\Rightarrow$$

$f(-1)=0$ αφού $f^2(-1)+1\neq 0.$

$$f^3(x)+f(x)=x+1\overset{x=1}{\Rightarrow}f^3(1)+f(1)=2\Rightarrow f^3(1)+f(1)-2=0\Rightarrow$$

$$f^3(1)-1+f(1)-1=0\Rightarrow\left(f(-1)-1\right)\left(f^2(-1)+f(-1)+1\right)+\left(f(-1)-1\right)=0\Rightarrow$$

$$\left(f(-1)-1\right)\left(f^2(-1)+f(-1)+2\right)=0\Rightarrow f(1)=1\qquad\left(f^2(-1)+f(-1)+2>0\ \text{ αφού }\ \Delta<0\right)$$

Δ2

$$f^3(x)+f(x)=x+1\Rightarrow 3f^2(x)\cdot f'(x)+f'(x)=1\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3f^2(x)+1}>0,$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

$$f''(x)=-\frac{6f(x)\cdot f'(x)}{\left(3f^2(x)+1\right)^2}=\frac{-6f'(x)}{\left(3f^2(x)+1\right)^2}\cdot f(x)$$

Αφού $\dfrac{-6f'(x)}{\left(3f^2(x)+1\right)^2}<0$, αρκεί να βρούμε το πρόσημο της f.

Η f είναι γνησίως αύξουσα και $f(-1) = 0$.

$$x<-1\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(x)<f(-1)=0\Rightarrow f(x)<0$$

$$x>-1\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(x)>f(-1)=0\Rightarrow f(x)>0$$

Άρα για $x < -1$, $f(x) < 0$ και επομένως $f''(x) > 0$, οπότε η f είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty, -1]$.

Για $x > -1$, $f(x) > 0$ και επομένως $f''(x) < 0$, οπότε η f είναι κοίλη στο διάστημα $[-1, +\infty)$.

Δ3 Αν $\alpha > 1$ τότε είναι $0<\dfrac{1}{\alpha}<1$

Για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $\left[\frac{1}{\alpha},1\right]$ και $[\alpha,1]$ αφού η f παραγωγίσιμη και επομένως συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in \left[\frac{1}{\alpha},1\right]$ και $\xi_2 \in [\alpha, 1]$ με

$$f'(\xi_1)=\frac{f(1)-f\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\frac{1}{\alpha}-1}=\frac{\alpha-\alpha f\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha-1} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2)=\frac{f(\alpha)-f(1)}{\alpha-1}=\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}$$

$$\frac{1}{\alpha}<\xi_1<1<\xi_2 \Rightarrow \xi_1<\xi_2 \underset{f'\searrow}{\overset{f\ \text{κοίλη}}{\Rightarrow}} f'(\xi_1)>f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{\alpha-\alpha f\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha-1}>\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1} \underset{\alpha-1>0}{\Rightarrow}$$

$$\alpha-\alpha f\left(\frac{1}{\alpha}\right)>f(\alpha)-1 \underset{\alpha>0}{\Rightarrow} \frac{1}{\alpha}f(\alpha)+f\left(\frac{1}{\alpha}\right)<1+\frac{1}{\alpha}$$

Δ4

Η f είναι γνησίως αύξουσα για $x > -1$ και $f(-1) = 0$. Άρα $f(x) \geq 0$ για $x \geq -1$.

Το εμβαδόν του χωρίου θα ισούται με $E=\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

$$f^3(x)+f(x)=x+1 \Rightarrow f^3(x)\cdot f'(x)+f(x)\cdot f'(x)=(x+1)\cdot f'(x) \Rightarrow$$

$$\int_{-1}^{1} f^3(x)\cdot f'(x)dx+\int_{-1}^{1} f(x)\cdot f'(x)dx=\int_{-1}^{1}(x+1)\cdot f'(x)dx \Rightarrow$$

$$\left[\frac{f^4(x)}{4}\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{f^2(x)}{2}\right]_{-1}^{1}=\left[(x+1)\cdot f(x)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1} f(x)dx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{4}-0+\frac{1}{2}-0=2-0-E(\Omega) \Rightarrow E(\Omega)=\frac{5}{4}$$