

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$. Να δείξετε ότι η f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$.

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Bolzano και τη γεωμετρική του ερμηνεία.

A3. Έστω μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Να δώσετε τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} .

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης f είναι πάντα μικρότερο από ένα τοπικό μέγιστο.

2. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως φθίνουσες στο διάστημα Δ τότε η σύνθεση της f με τη g είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

3. Μια συνάρτηση και η παράγουσά της δεν μπορούν να είναι ίσες συναρτήσεις

4. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της

5. Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} είναι άρτια, τότε είναι και 1-1

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2\eta\mu^3 x + x + 1, & x < 0 \\ 2x^2 + x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

B1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής σε όλο το \mathbb{R} .

B2. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

B3. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-\pi, 0)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$

B4. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2023 \cdot f'\left(\frac{1}{2}\right) \cdot x^3}{|x+1|}$

B5. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{x-1}$.

Να βρείτε την συνάρτηση $(g \circ f)'(x)$, με $x > 0$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^x}, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και στη συνέχεια να ελέγξετε αν η f είναι συνάρτηση 1 προς 1 στο πεδίο ορισμού της.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{f(x)} - \ln(x+3)$, $x \in (-3, 0]$

παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ το οποίο ισούται με $\frac{x_0^2 + 4x_0 + 4}{x_0 + 3}$.

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\alpha) - f(2\alpha) + \alpha f'(\alpha)}{x+1} + \frac{1 - (\alpha+1)f(\alpha)}{x+2} = 0$, $\alpha < -1$

έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(-2, -1)$.

Γ4. Ένα υλικό σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, $x > 0$ με $x = x(t)$ και $y = y(t)$, $t \geq 0$. Η τετμημένη x του σημείου M αυξάνεται κατά 2 cm το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης $\ell = (OM)$, τη χρονική στιγμή που η εφαπτομένη της C_f στο σημείο M , τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $A(1,0)$, όπου O η αρχή των αξόνων.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί την σχέση $f^3(x) + f(x) = x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ₁ Να βρείτε την τιμή της συνάρτησης f για $x = -1$ και $x = 1$.

Δ₂ Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

Δ₃ Αν $\alpha > 1$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\alpha} f(\alpha) + f\left(\frac{1}{\alpha}\right) < 1 + \frac{1}{\alpha}$.

Δ₄ Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του χωρίου Ω που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία

$$x = 1 \text{ είναι } E(\Omega) = \frac{4}{5}.$$