

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ Α:

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 99

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 128

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 133

A4. 1. Σωστό

2. Σωστό

3. Σωστό

4. Σωστό

ΘΕΜΑ Β :

B1. Η f συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Η f συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Για $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x+1} = 0 \quad \text{και} \quad f(0) = 0$$

Άρα η f συνεχής στο $[-1, 1]$.

Η f παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$.

Για $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{xe^x - 0}{x - 0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{x+1} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x(x+1)} = 1$$

Άρα η f παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$.

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.

B2. Για $x < 0$

$$f'(x) = (xe^x)' = e^x + xe^x = e^x(x+1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	0
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Η $f \searrow$ στο $(-\infty, -1]$ και $f \nearrow$ στο $[-1, 0)$

Για $x > 0$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x+1} \right)' = \frac{(x)'(x+1) - (x+1)'(x)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

Άρα η $f \nearrow$ στο $[0, +\infty)$

B3.

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x)^{(-\infty)0} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

Άρα η $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

Άρα η $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

B4.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2 + x} \cdot \sigma\upsilon\nu x \right)$$

$$\left| \frac{x}{x^2 + x} \cdot \sigma\upsilon\nu x \right| \leq \left| \frac{x}{x^2 + x} \right| \Leftrightarrow -\left| \frac{x}{x^2 + x} \right| \leq \frac{x}{x^2 + x} \cdot \sigma\upsilon\nu x \leq \left| \frac{x}{x^2 + x} \right|$$

$$\text{Όμως ισχύει ότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Εφαρμόζοντας Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1} \cdot \sigma\upsilon\nu x \right) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{x}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x} = +\infty$$

ΘΕΜΑ Γ :

Γ1. Πρέπει $x > 0$ και $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Άρα $A_f = (1, +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{x \cdot \ln x}, x > 1.$$

$$f(e^2) = \ln \ln(e^2) = \ln(2 \cdot \ln e) = \ln 2 \quad \text{και} \quad f'(e^2) = \frac{1}{e^2 \cdot \ln e^2} = \frac{1}{2e^2}$$

Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$$y - \ln 2 = \frac{1}{2e^2} (x - e^2) \Leftrightarrow y = \frac{x}{2e^2} + \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

$$\mathbf{\Gamma 2.} \quad f''(x) = \frac{(1)' \cdot (x \ln x) - (x \ln x)'}{(x \ln x)^2} = -\frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2} < 0.$$

Άρα η f είναι κοίλη και η f' γνησίως φθίνουσα. Επομένως
 $\alpha < \beta \Leftrightarrow f'(\alpha) > f'(\beta).$

$$\mathbf{\Gamma 3.} \quad \text{Για } \alpha, \beta > 1, \quad \ln \frac{\alpha + \beta}{2} > 0 \quad \text{και} \quad \sqrt{\ln \alpha \cdot \ln \beta} > 0.$$

$$\ln \frac{\alpha + \beta}{2} \geq \sqrt{\ln \alpha \cdot \ln \beta} \Leftrightarrow \ln \left(\ln \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \geq \ln \left(\sqrt{\ln \alpha \cdot \ln \beta} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \geq \ln (\ln \alpha \cdot \ln \beta)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow f \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \geq \frac{\ln (\ln \alpha \cdot \ln \beta)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \geq \frac{\ln (\ln \alpha) + \ln (\ln \beta)}{2} \Leftrightarrow f \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \geq f(\alpha) + f(\beta).$$

Η f είναι συνεχής στα $[\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}]$, $[\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta]$ ως σύνθεση λογαριθμικών συναρτήσεων.

Η f είναι παραγωγίσιμη στα $(\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2})$, $(\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta)$ με $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}, x > 1.$

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2})$ και $\xi_2 \in (\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta)$ με

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\frac{\alpha + \beta}{2}) - f(\alpha)}{\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha} = 2 \frac{f(\frac{\alpha + \beta}{2}) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = 2 \frac{f(\beta) - f(\frac{\alpha + \beta}{2})}{\beta - \alpha}$$

$$\begin{aligned} \text{όμως } \xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \downarrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) &\Leftrightarrow 2 \frac{f(\frac{\alpha+\beta}{2}) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > 2 \frac{f(\beta) - f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\beta - \alpha} \stackrel{\beta - \alpha > 0}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow f(\frac{\alpha+\beta}{2}) - f(\alpha) > f(\beta) - f(\frac{\alpha+\beta}{2}) \Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \geq f(\alpha) + f(\beta). \end{aligned}$$

Γ4. Η f είναι κοίλη, άρα βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της.

Το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από το ολοκλήρωμα $I =$

$$\int_e^{e^2} \left[\left(\frac{x}{2e^2} + \ln 2 - \frac{1}{2} \right) - (\ln(\ln x)) \right] dx$$

$$I_1 = \int_e^{e^2} \left(\frac{x}{2e^2} + \ln 2 - \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{x^2}{4e^2} + (\ln 2 - \frac{1}{2})x \right]_e^{e^2} = e^2 \left(\ln 2 - \frac{1}{4} \right) - e \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4}.$$

$$I_2 = \int_e^{e^2} \ln(\ln x) dx = \int_e^{e^2} (x)' \cdot \ln(\ln x) dx = [x \cdot \ln(\ln x)]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} x \cdot (x \ln x)' dx =$$

$$= e^2 \ln 2 - \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln x} dx = e^2 \ln 2 + \int_e^{e^2} \ln x \cdot dx = e^2 \ln 2 + e^2 = e^2 (1 + \ln 2)$$

$$\text{γιατί } \int_e^{e^2} \ln x \cdot dx = \int_e^{e^2} (x)' \ln x dx = [x \ln x]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} 1 \cdot dx = 2e^2 - e - [x]_e^{e^2} = e^2$$

$$\text{Τελικά } E = I_1 + I_2 =$$

$$= e^2 \left(\ln 2 - \frac{1}{4} \right) - e \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} + e^2 = e^2 \left(\ln 2 + \frac{3}{4} \right) - e \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} \approx 10 > 0.$$

ΘΕΜΑ Δ :

Δ1.

$$f'(x)(e^{f(x)} - 1) = e^{-f(x)} \cdot e^{2x} \Rightarrow f'(x) \cdot e^{f(x)} (e^{f(x)} - 1) = e^{2x} \Rightarrow f'(x) \cdot e^{2f(x)} - f'(x) \cdot e^{f(x)} = e^{2x} \Rightarrow$$

$$2f'(x) \cdot e^{2f(x)} - 2f'(x) \cdot e^{f(x)} = 2e^{2x} \Rightarrow (e^{2f(x)} - 2e^{f(x)})' = (e^{2x})' \Rightarrow e^{2f(x)} - 2e^{f(x)} = e^{2x} + c \stackrel{x=0}{\Rightarrow}$$

$$e^{2 \ln 2} - 2e^{\ln 2} = e^0 + c \Rightarrow 4 + 4 = 1 + c \Rightarrow c = -1$$

$$\text{Άρα } e^{2f(x)} - 2e^{f(x)} = e^{2x} - 1 \Rightarrow e^{2f(x)} - 2e^{f(x)} + 1 = e^{2x} \Rightarrow (e^{f(x)} - 1)^2 = e^{2x} \Rightarrow$$

$$|e^{f(x)} - 1| = e^x \quad (1)$$

Θέτω $g(x) = e^{f(x)} - 1$, άρα η (1) γίνεται : $|g(x)| = e^x \neq 0$

Αφού $g(x) \neq 0$ και g συνεχής, διατηρεί πρόσημο.

$$g(0) = e^{f(0)} - 1 = e^{\ln 2} - 1 = 2 - 1 = 1 > 0, \text{ άρα } g(x) > 0.$$

$$\text{Τελικά έχουμε: } e^{f(x)} - 1 = e^x \Rightarrow e^{f(x)} = e^x + 1 \Rightarrow f(x) = \ln(e^x + 1), x \in \mathbb{R}.$$

Δ2.

$$f(x) = \ln(e^x + 1), \quad f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}, \quad f''(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

Έστω $M(x_0, f'(x_0))$ το σημείο επαφής. Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι: $\varepsilon: y - f'(x_0) = f''(x_0)(x - x_0)$.

Αφού η ε διέρχεται από το $A(6, 2)$, τότε:

$$y - f'(x_0) = f''(x_0)(x - x_0) \Rightarrow 2 - f'(x_0) = f''(x_0)(6 - x_0) \Rightarrow$$

$$2 - \frac{e^{x_0}}{e^{x_0} + 1} = \frac{e^{x_0}}{(e^{x_0} + 1)^2} (6 - x_0) \Rightarrow 2(e^{x_0} + 1)^2 - e^{x_0}(e^{x_0} + 1) = 6e^{x_0} - x_0 e^{x_0} \Rightarrow$$

$$e^{2x_0} - 3e^{x_0} + x_0 e^{x_0} + 2 = 0.$$

$$\text{Θέτω } h(x) = e^{2x} - 3e^x + xe^x + 2, \quad h'(x) = e^x(2e^x + x - 2)$$

$$P(x) = 2e^x + x - 2, \quad P'(x) = 2e^x + 1 > 0, \text{ άρα } P(x) \text{ γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}.$$

$$P(0) = 0. \text{ Για } x > 0 \xrightarrow{P \nearrow} P(x) > P(0) = 0 \text{ και για } x < 0 \xrightarrow{P \nearrow} P(x) < P(0) = 0.$$

Το πρόσημο της P είναι ίδιο με το πρόσημο της $h'(x)$, αφού $e^x > 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h'	$-$	0	$+$
h			

T.E.

Για $x=0$ η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $h(0)=0$, άρα $h(x) \geq 0$.

Η $x=0$ λοιπόν είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x)=0$.

$$\text{Επομένως το σημείο επαφής είναι το } M(0, f'(0)) = M\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$f'(0) = \frac{1}{2} \text{ και } f''(0) = \frac{1}{4}, \text{ άρα η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:}$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x - 0) \Rightarrow x - 4y + 2 = 0.$$

Δ3.

f συνεχής στο $[0, \ln x]$ ως σύνθεση συνεχών.

f παραγωγίσιμη στο $(0, \ln x)$ με $f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, \ln x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\ln x) - f(0)}{\ln x} = \frac{\ln(x+1) - \ln 2}{\ln x}$$

$$f''(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0, \text{ άρα } f' \nearrow \text{ στο } \mathbb{R}.$$

$$\xi < \ln x \Rightarrow f'(\xi) < f'(\ln x) \Rightarrow \frac{\ln(x+1) - \ln 2}{\ln x} < \frac{e^{\ln x}}{e^{\ln x} + 1} \Rightarrow \frac{\ln(x+1) - \ln 2}{\ln x} < \frac{x}{x+1} \xrightarrow{x>1, \ln x > 0}$$

$$(x+1)(\ln(x+1) - \ln 2) < x \ln x \Rightarrow (x+1) \cdot \ln \frac{x+1}{2} < \ln x^x.$$

Δ4.

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} > 0, \text{ άρα } f \nearrow \text{ στο } (0, +\infty).$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$\bullet \quad e^x \geq x+1 \Rightarrow e^{x-1} \geq x \Rightarrow f(e^{x-1}) \geq f(x) \quad (1)$$

$$\bullet \quad |\eta \mu x| \leq |x| \quad \text{και η ισότητα ισχύει για } x=0.$$

$$|\eta \mu x| \leq |x| \xrightarrow{x \geq 0} |\eta \mu x| \leq x \Rightarrow -x \leq \eta \mu x \leq x$$

$$\eta \mu x \geq -x \Rightarrow f(\eta \mu x) \geq f(-x) \quad (2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow f(e^{x-1}) + f(\eta \mu x) \geq f(x) + f(-x) \quad (3)$$

$$f(-x) = \ln(e^{-x} + 1) = \ln \frac{e^x}{e^x + 1} = \ln(e^x + 1) - \ln e^x = f(x) - x, \text{ άρα}$$

$$f(e^{x-1}) + f(\eta \mu x) \geq f(x) + f(x) - x \Rightarrow f(e^{x-1}) + f(\eta \mu x) + x \geq 2f(x).$$