

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

A2. Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Rolle.

A3. Να δώσετε τον ορισμό της κατακόρυφης ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f .

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ , τότε αυτόματα είναι και 1-1 στο διάστημα αυτό.

2. Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{P}{Q}$ είναι συνεχής.

3. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

4. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x < 0 \\ \frac{x}{x+1}, & x \geq 0 \end{cases}$.

B1. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται για την f το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[-1, 1]$.

B2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f αν υπάρχουν.

B4. Να βρείτε τα όρια : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) \cdot \frac{\sin x}{x} \right), \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)}$.

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(\ln x)$.

Γ1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(e^2, f(e^2))$.

Γ2. Αν $\alpha, \beta \in A_f$ με $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι $f'(\alpha) > f'(\beta)$.

Γ3. Αν $\alpha, \beta \in A_f$, να δείξετε ότι $\ln \frac{\alpha + \beta}{2} \geq \sqrt{\ln \alpha \cdot \ln \beta}$.

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f , της εφαπτομένης της στο σημείο A και των ευθειών $x=e$ και $x=e^2$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f'(x)(e^{f(x)} - 1) = e^{-f(x)} \cdot e^{2x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Αν } f(0) = \ln 2,$$

Δ1. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

$$\text{Αν } f(x) = \ln(e^x + 1)$$

Δ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f' η οποία διέρχεται από το σημείο $A(6,2)$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι $(x+1) \cdot \ln \frac{x+1}{2} < \ln x^x$ στο διάστημα $(0, \ln x)$ με $x > 1$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι $f(e^{x-1}) + f(\eta\mu x) + x \geq 2f(x)$, για κάθε $x \geq 0$.

