ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΑΠΟ ΤΗΝ ΟΜΑΔΑ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ

ΤΟΥ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ ΚΑΡΑΚΑΞΗΣ

- ΘΕΜΑΤΑ ΠΙΟ ΑΠΑΙΤΗΤΙΚΑ ΑΠΟ ΤΑ ΠΕΡΣΙΝΑ

- ΔΥΣΚΟΛΟ ΤΟ ΣΩΣΤΟ ΛΑΘΟΣ β (ΜΠΟΡΟΥΣΑΝ ΝΑ ΜΠΕΡΔΕΥΤΟΥΝ ΚΑΙ ΑΡΙΣΤΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΕΧΟΝΤΑΣ ΣΤΟ ΜΥΑΛΟ ΤΟΥΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ)

- ΕΚΤΕΝΕΣ (ΑΝ ΚΑΙ ΜΕ ΚΑΠΟΙΑ ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ) ΤΟ ΘΕΜΑ Β.
  ΕΙΔΙΚΑ ΤΟ Β3 ii ΕΠΙΒΑΡΥΝΕ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ ΠΟΥ ΠΟΝΤΑΡΑΝ ΣΤΗ ΛΟΓΙΚΗ :<<ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ ΝΑ ΓΡΑΨΩ ΟΛΟΚΛΗΡΟ ΤΟ Β>>

- ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟ ΚΟΜΜΑΤΙ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΣΤΟ Γ4 ΟΠΟΥ ΑΝ ΔΕΝ ΕΚΑΝΕΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ ΘΕΣΙΜΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΔΟΥΛΕΥΕΣ ΣΕ ΛΑΘΟΣ ΚΛΑΔΟ ΛΟΓΩ ΤΟΥ ΑΡΝΗΤΙΚΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ.

- ΓΙΑ ΛΙΓΟΥΣ ΤΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ Δ3 (ΚΥΡΙΩΣ) ΚΑΙ Δ4.

- ΑΡΚΕΤΑ ΔΥΣΚΟΛΟ ΤΟ Δ2 (ΜΕ ΜΙΑ ΙΔΕΑ ΣΥΝΘΗΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΠΟΥ ΕΧΕΙ ΟΜΩΣ ΑΝΑΛΥΘΕΙ ΣΤΟ ΠΡΟΣΦΑΤΟ ΠΑΡΕΛΘΟΝ).

ΣΕ ΕΝΑ ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΣΧΟΛΙΟ,

ΠΙΣΤΕΥΟΥΜΕ ΠΩΣ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΗΤΑΝ ΓΙΑ ΚΑΛΑ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΜΕΝΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ

ΠΟΥ ΓΙΑ ΝΑ ΑΡΙΣΤΕΥΣΟΥΝ

ΕΠΡΕΠΕ ΝΑ ΕΙΧΑΝ <u>ΟΧΙ ΜΟΝΟ ΑΚΟΥΣΕΙ ΠΑΡΕΜΦΕΡΕΙΣ ΙΔΕΕΣ</u>

ΑΛΛΑ

ΝΑ <u>ΕΙΧΑΝ ΚΛΗΘΕΙ ΝΑ ΤΙΣ ΥΛΟΠΟΙΗΣΟΥΝ ΚΑΙ ΣΕ ΚΑΠΟΙΑ ΑΠΟ ΤΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑΣ</u>

ΠΟΥ ΕΓΡΑΨΑΝ ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΤΗΣ (ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΔΥΣΚΟΛΗΣ ΛΟΓΩ ΤΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΕΔΩ ΚΑΙ ΤΡΙΑ ΧΡΟΝΙΑ) ΧΡΟΝΙΑΣ .

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΘΕΤΙΚΗΣ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. (Σχολ βιβλ σελ. 186)

Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c\in\mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού $G'(x)=\left(F(x)+c\right)'=F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύουν $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε $G'(x)=F'(x)$, για κάθε $x\in\Delta$. Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x)=F(x)+c$, για κάθε $x\in\Delta$.

Α2. (Σχολ βιβλ σελ. 142)
Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε:
$f'(x_0)=0$

Α3. (Σχολ βιβλ σελ. 161)
Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Α4. α) Σωστό β) Σωστό γ) Σωστό
δ) Λάθος ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. το πεδίο ορισμού της παράστασης $f\circ g$ είναι:

$$\begin{cases}x\in D_g\\ g(x)\in D_f\end{cases}=\begin{cases}x\geq 0\\ \sqrt{x}\leq 1\end{cases}=\begin{cases}x\geq 0\\ x\leq 1\end{cases}=[0,1]\neq\varnothing$$

$$D_{f\circ g}=[0,1].$$

$f(x)=x^4-2x^2+1=\left(x^2-1\right)^2$, οπότε ο τύπος της $f\circ g$ είναι:

$$(f\circ g)(x)=\left(\sqrt{x}^2-1\right)^2=(x-1)^2,\ x\in[0,1].$$

Β2. Για $x \in (0,1)$ είναι:

$$h'(x) = 2(x-1) < 0$$

και η h είναι και συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ άρα και 1 – 1, οπότε αντιστρέφεται.

Η h έχει σύνολο τιμών το

$$h([0,1]) = [h(1), h(0)] = [0,1] .$$

$$h(x) = y \Leftrightarrow (x-1)^2 = y \Leftrightarrow |x-1| = \sqrt{y} \Leftrightarrow -x+1 = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = 1-\sqrt{y} .$$

Άρα,

$$h^{-1}(x) = 1-\sqrt{x},\ x \in [0,1].$$

Β3. i) Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $(0,1)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = 1 = \varphi(0)$$

συνεχής και στο διάστημα $[0,1)$

$$\lim_{x\to 1^-} \varphi(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2} = \varphi(1).$$

Οπότε η φ είναι συνεχής και στο 1 άρα είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Τέλος, $\varphi(0) = 1$ και $\varphi(1) = \frac{1}{2}$ άρα $\varphi(0) \neq \varphi(1)$ συνεπώς για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών στο διάστημα $[0,1]$.

ii) Η συνάρτηση ημx είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \subseteq \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, οπότε θα ισχύει:

$$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\frac{\pi}{6} < \eta\mu\alpha < \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu\alpha < 1$$

$\varphi(1) < \eta\mu\alpha < \varphi(0)$ και η συνάρτηση φ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών στο διάστημα $[0,1]$ τότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = \eta\mu\alpha$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x < -1$ έχουμε:

$$f'(x) = -2 \Leftrightarrow f'(x) = (-2x)'$$

κι επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι και στο $(-\infty, -1)$, οπότε υπάρχει $c_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x) = -2x + c_1, x < -1 .$$

Για κάθε $x > -1$ έχουμε:

$$f'(x)=3x^2-1 \Leftrightarrow f'(x)=\left(x^3-x\right)'$$

κι επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι και στο $(-1,+\infty)$, οπότε υπάρχει $c_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x)=x^3-x+c_2, x>-1.$$

Η C_f διέρχεται από $O(0,0)$ άρα

$$f(0)=0 \Leftrightarrow 0^3-0+c_2=0 \Leftrightarrow c_2=0.$$

Επομένως,

$$f(x)=\begin{cases}-2x+c_1, x<-1\\ x^3-x, \quad x>-1\end{cases}$$

Επίσης, η f είναι συνεχής $\mathbb{R}$ άρα και στο -1 οπότε

$$f(-1)=\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-} f(x) \Leftrightarrow f(-1)=2+c_1=0$$

άρα

$$f(-1)=0 \text{ και } c_1=-2$$

και

$$f(x)=\begin{cases}-2x-2, x\le -1\\ x^3-x, \quad x>-1\end{cases}.$$

Γ2. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ με $x_0>-1$ έχει εξίσωση

$$y-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$$

και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -2

$$-2-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(0-x_0\right) \Leftrightarrow -2-\left(x_0^3-x_0\right)=\left(3x_0^2-1\right)\left(-x_0\right) \Leftrightarrow x_0^3=1 \Leftrightarrow x_0=1$$

Επομένως,

$$y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y=2x-2.$$

Γ3. Σε χρόνο t έχουμε το σημείο $M\left(x(t), y(t)\right)$ για το οποίο ισχύει ότι $y(t)=2x(t)-2$ με $x(t)>2$ και για τη χρονική στιγμή t_0 που διέρχεται από το σημείο $B(3,4)$ είναι

$x(t_0)=3$, $y(t_0)=4$ $\qquad$ $x'(t_0)=2$ μον/s.

Το τρίγωνο ΓΚΜ είναι ορθογώνιο στο $K(x(t),0)$ με $\Gamma(2,0)$

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}K\Gamma \cdot MK = \frac{1}{2}(x(t)-2)y(t) \\ &= \frac{1}{2}(x(t)-2)(2x(t)-2) \\ &= x^2(t)-3x(t)+2 \end{aligned}$$

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού σε χρόνο t, είναι

$$E'(t) = 2x(t)x'(t)-3x'(t)$$

$$E'(t_0) = 2x(t_0)x'(t_0)-3x'(t_0) = 2\cdot 3\cdot 2-3\cdot 2 = 6 \text{ τ.μον}/\text{s}.$$

Γ4. Για $x<-1$ είναι, $f(x)=-2x-2$ οπότε

το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-2x-2) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-2x) = +\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)} = 0$ και $f(x)>0$

Για $x<-1$ είναι,

$$\left|\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right| = \frac{|\eta\mu f(x)|}{|f(x)|} \le \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} \le \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \le \frac{1}{f(x)}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0$, άρα από κριτήριο παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = 0.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3} \overset{-x=u}{\underset{u_0=+\infty}{=}} \lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{1+u^3} = \lim_{u\to+\infty}\frac{u^3-u}{1+u^3} = \lim_{u\to+\infty}\frac{u^3}{u^3} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3}\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \lim_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3} = 0+1 = 1.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i) Η f είναι παραγωγίσιμη

$$f'(x) = (x-\ln(3x))' = 1-\frac{1}{3x}\cdot(3x)' = 1-\frac{3}{3x} = 1-\frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ άρα

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}(x-\ln(3x)) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x-\ln(3x)) = 1-\ln 3 = \ln e - \ln 3 < 0$$

Άρα

$$f((0,1]) = \left[\ln\frac{e}{3}, +\infty\right)$$

και επειδή $0 \in f((0,1])$ και $f \searrow$ στο $(0,1]$, η εξίσωση $f(x)=0$, έχει μοναδική λύση $x_1 \in (0,1]$.

f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ άρα

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x-\ln(3x)) = \ln\frac{e}{3} < 0$$

και

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}(x-\ln(3x)) = \lim_{x\to +\infty}\left(\ln e^x - \ln(3x)\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\ln\frac{e^x}{3x}\right)$$

Θέτουμε: $u = \frac{e^x}{3x}$ οπότε $\lim_{x\to +\infty} u = \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{3x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to +\infty}\frac{(e^x)'}{(3x)'} = \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{3} = +\infty$.

Τελικά,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{u\to +\infty}(\ln u) = +\infty$$

Άρα,

$$f([1,+\infty)) = \left[\ln\frac{e}{3}, +\infty\right)$$

και επειδή $0 \in f([1,+\infty))$ και $f \nearrow$ στο $[1,+\infty)$, η εξίσωση $f(x)=0$, έχει μοναδική λύση $x_2 \in [1,+\infty)$.

η εξίσωση $f(x)=0$, έχει ακριβώς δύο λύσεις x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$.

ii) Η f' είναι παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2} > 0 \text{ , για κάθε } x \in (0,+\infty),$$

άρα η f είναι κυρτή.

Δ2.

Είναι $f(x) \le 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$

διότι

$$x_1 \le x \le 1 \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x_1) \ge f(x) \Rightarrow 0 \ge f(x)$$

και

$$1 \le x \le x_2 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x) \le f(x_2) \Rightarrow f(x) \le 0$$

$$
\begin{aligned}
E(\Omega) &= -\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} (\ln 3x - x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} (x)'\ln 3x\,dx - \int_{x_1}^{x_2} x\,dx \\
&= \left[x\ln 3x\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} 1\,dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} \\
&= x_2\underbrace{\ln 3x_2}_{x_2} - x_1\underbrace{\ln 3x_1}_{x_1} - (x_2 - x_1) - \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^2}{2} \\
&= x_2^2 - x_1^2 - (x_2 - x_1) - \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^2}{2} \\
&= \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} - (x_2 - x_1) \\
&= (x_2 - x_1)\left(\frac{x_2}{2} + \frac{x_1}{2} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2)
\end{aligned}
$$

από το Δ1 ερώτημα έχουμε:

$$f(x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \ln 3x_1 \;\text{ και }\; f(x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 = \ln 3x_2$$

Δ3.

$$x_1 < 1 \Leftrightarrow -x_1 > -1 \Leftrightarrow 2 - x_1 > 1$$

$$f(2 - x_1) < 0 \Leftrightarrow f(2 - x_1) < f(x_2) \overset{2-x_1,\, x_2 \in [1, +\infty)}{\underset{f \nearrow}{\Leftrightarrow}} 2 - x_1 < x_2 \Leftrightarrow 2 < x_1 + x_2$$

που ισχύει

$$E = \frac{x_2 - x_1}{2}(x_1 + x_2 - 2) > 0 \overset{x_2 > x_1}{\Rightarrow} x_1 + x_2 - 2 > 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 > 2\,.$$

Δ4. Παρατηρούμε ότι $f(1)=1-\ln 3$. Οπότε η εξίσωση γίνεται ισοδύναμα:

$$2f(x)-f(1)=f'(x_2)(x-x_2)\ .$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $A(x_2, f(x_2))$ είναι

$$y-f(x_2)=f'(x_2)(x-x_2)\,.$$

Από το ερώτημα Δ1 έχουμε $f(x_2)=0$ οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y=f'(x_2)(x-x_2)\,.$$

Η f είναι κυρτή οπότε

$$f(x)\geq f'(x_2)(x-x_2) \quad (1)$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=x_2$.

από Δ1 έχουμε ότι το $f(1)$ είναι ολικό ελάχιστο της f, άρα

$$f(x)\geq f(1)\Leftrightarrow f(x)-f(1)\geq 0 \quad (2)$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

επειδή οι ισότητες δεν ικανοποιούνται ταυτόχρονα

η εξίσωση

$$2f(x)-f(1)=f'(x_2)(x-x_2)\Leftrightarrow 2f(x)=1-\ln 3+f'(x_2)(x-x_2)$$

είναι αδύνατη για $x\in(0,+\infty)$.