TRANSFORMERS THE FINAL BATTLE

Μετά από μια σκληρή μάχη μεταξύ των Autobots και των Decepticons οι μηχανές προώθησης του Megatron έπαθαν βλάβη και έτσι δεν μπορεί να πετάξει, παραμόνο να κινείται δεξιά και αριστερά. Ο Megatron έτσι, έχει περιοριστεί να κινείται στον άξονα x΄x.

Το σχέδιο των Autobots είναι το εξής:

- Ο **Ironhide**  (που είναι ειδικός στα όπλα και παλιός φίλος του Optimus Prime) κινείται στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x)=(x-1)\cdot e^{x}$ και θα χρησιμοποιεί το plasma cannon launcher σημαδεύοντας πάντα προς το άξονα x΄x εφαπτομενικά της καμπύλης της f,

  με σκοπό να περιορίσει τον **Megatron**  σε ένα κομμάτι του άξονα x΄x.

- Ο **Optimus Prime**  κινείται στην καμπύλη της συνάρτησης $g(x)=(x+1)\cdot e^{-\alpha\cdot x}-1,\ \alpha>0$ και έχει σκοπό να αφήσει έναν ισχυρό εκρηκτικό μηχανισμό στο σημείο που η μέγιστη τιμή της g παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

- Ο **Bumblebee**  (η γνωστή κίτρινη Camaro) θα επιβλέπει την μάχη προστατεύοντας τα υπόλοιπα Autobots κινούμενος σε δυο χωρία. Το πρώτο χωρίο είναι αυτό που περικλείεται από τις εφαπτομένες της C_f που διέρχονται από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος που μπορεί να κινηθεί ο Megatron, της C_f και της κάθετης ευθείας στον άξονα x΄x ,στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που μπορεί να κινηθεί ο Megatron . Το δεύτερο χωρίο είναι αυτό που περικλείεται από την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το αριστερό άκρο του ευθύγραμμου τμήματος που μπορεί να κινηθεί ο Megatron, της C_f και του άξονα x΄x.

Α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των άκρων του ευθύγραμμου τμήματος που μπορεί να κινηθεί ο Megatron .

Β. Να αποδείξετε ότι ο εκρηκτικός μηχανισμός που θα τοποθετήσει ο Optimus Prime θα καταστρέψει τον Megatron.

Γ. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που διέρχονται από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος που μπορεί να κινηθεί ο Megatron και να δείξετε ότι είναι μεταξύ τους κάθετες.

Δ. Να αποδείξετε ότι μια από τις δύο εφαπτομένες που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα ΄΄ διαπερνά΄΄ την C_f.

Ε. Να υπολογίστε το εμβαδόν των χωρίων που κινείται ο Bumblebee.

ΛΥΣΗ

Α.

$f(x)=(x-1)\cdot e^x$ και $f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$

Έστω $A\left(k,f(k)\right)$ το σημείο επαφής. Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι:

$y-f(k)=f'(k)(x-k)\Rightarrow y-(k-1)e^k=ke^k(x-k)$ (1) .

Σημείο τομής με x΄x (για y=0)

$(1)\Rightarrow -(k-1)e^k=ke^k(x-k)\Rightarrow -k+1=kx-k^2\Rightarrow x=\dfrac{k^2-k+1}{k}=k+\dfrac{1}{k}-1,\ \ k\neq 0$

(Αν k=0 ο Ironhide θα βρίσκεται στο ελάχιστο της συνάρτησης f και η εφαπτομένη θα είναι παράλληλη στον x΄x αφού $f'(0)=0$ και τα πυρά του δεν πετυχαίνουν τον άξονα x΄x).

Έστω $P(k)=k+\dfrac{1}{k}-1,\ k\neq 0$ $\quad P'(k)=1-\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{k^2-1}{k^2}=0\Rightarrow k=\pm 1$

κ	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$P'(k)$		+	0	-	‖	-	0	+	
$P(k)$		$\nearrow$		$\searrow$	‖	$\searrow$		$\nearrow$	
			T.M				T.E.		

$A_1=(-\infty,-1],\ A_2=[-1,0),\ A_3=(0,1],\ A_4=[1,+\infty)$

$P\left(A_1\right)\overset{P\nearrow}{=}(\lim\limits_{K\to-\infty}P(k),P(-1)]=(-\infty,-3]$

$P\left(A_2\right)\overset{P\searrow}{=}(\lim\limits_{K\to 0^-}P(k),P(-1)]=(-\infty,-3]$

$P\left(A_3\right)\overset{P\searrow}{=}[P(1),\lim\limits_{K\to 0^+}P(k))=[3,+\infty)$

$P\left(A_4\right)\overset{P\nearrow}{=}[P(1),\lim\limits_{k\to+\infty}P(k))=[3,+\infty)$

Άρα P(A)= $(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$, δηλαδή οι βολές του Ironhide θα πλήττουν το διάστημα $(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$.

Επομένως ο Megatron θα κινείται στο διάστημα (-3, 1) του άξονα x΄x.

Β.

$g(x)=(x+1)\cdot e^{-\alpha\cdot x}-1,\ \alpha>0 \quad ,D_g=\mathbb{R}, \quad g'(x)=e^{-\alpha x}-\alpha(x+1)e^{-\alpha x}=e^{-\alpha x}(1-\alpha x-\alpha)$

$g'(x)\geq 0\Rightarrow 1-\alpha x-\alpha\geq 0\Rightarrow \alpha x\leq 1-\alpha \overset{\alpha>0}{\Rightarrow} x\leq \dfrac{1-\alpha}{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}-1$

Για $x\leq \dfrac{1}{\alpha}-1,\ g'(x)\geq 0$ και g γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\dfrac{1}{\alpha}-1]$.

Για $x\geq \dfrac{1}{\alpha}-1,\ g'(x)\leq 0$ και g γνησίως φθίνουσα στο $[\dfrac{1}{\alpha}-1,+\infty)$.

Άρα για $x=\dfrac{1}{\alpha}-1$ η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $g\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)=\dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha-1}-1$.

Θεωρώ την συνάρτηση

$h(x)=\dfrac{1}{x}e^{x-1}-1, x>0, \quad h'(x)=-\dfrac{1}{x^2}e^{x-1}+\dfrac{1}{x}e^{x-1}=e^{x-1}\dfrac{x-1}{x^2}\geq 0\Rightarrow x\geq 1$

Για $x\geq 1$, $h'(x)\geq 0$ και h γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Για $x\leq 1$, $h'(x)\leq 0$ και h γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$.

Άρα για x=1 η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το h(1)=0.

Τελικά το μέγιστο της πορείας του Optimus Prime $\left(\dfrac{1}{\alpha}-1,\ \dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha-1}-1\right)$ παίρνει την ελάχιστη τιμή του για α=1 και είναι το σημείο O(0,0).

Επομένως ο Optimus Prime θα αφήσει τον εκρηκτικό μηχανισμό στο σημείο O(0,0), που ανήκει στο διάστημα που κινείται ο Megatron.

Γ.

Θα βρούμε λοιπόν τις εξισώσεις των εφαπτομένων που διέρχονται από τα σημεία Α(-3,0) και Β(1,0)

Το σημείο Β(1,0) είναι σημείο της C_f. Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι η (ε_1): $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y=e(x-1)\Rightarrow y=ex-e$.

Το σημείο Α(-3,0) δεν είναι σημείο της C_f.

Έστω $K(\alpha,f(\alpha))$ το σημείο επαφής. Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι:

$$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)\underset{x=-3,\,y=0}{\overset{\text{διέρχεται από το }(-3,0)}{\Longrightarrow}}-f(\alpha)=f'(\alpha)(-3-\alpha)\Rightarrow f(\alpha)=f'(\alpha)(\alpha+3)\Rightarrow$$

$$(\alpha-1)e^{\alpha}=\alpha e^{\alpha}(\alpha+3)\Rightarrow \alpha-1=\alpha^2+3\alpha\Rightarrow \alpha^2+2\alpha+1=0\Rightarrow \alpha=-1$$

επομένως το σημείο επαφής είναι το $K\left(-1,-\frac{2}{e}\right)$ και η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση

(ε_2): $y-f(-1)=f'(-1)(x+1)\Rightarrow y+\frac{2}{e}=-\frac{1}{e}(x+1)\Rightarrow y=-\frac{1}{e}x-\frac{3}{e}$

$\lambda_1\cdot\lambda_2=e\left(-\frac{1}{e}\right)=-1$ άρα $\varepsilon_1\perp\varepsilon_2$.

Δ.

$f''(x)=e^x+xe^x=e^x(x+1)=0\Rightarrow x=-1$

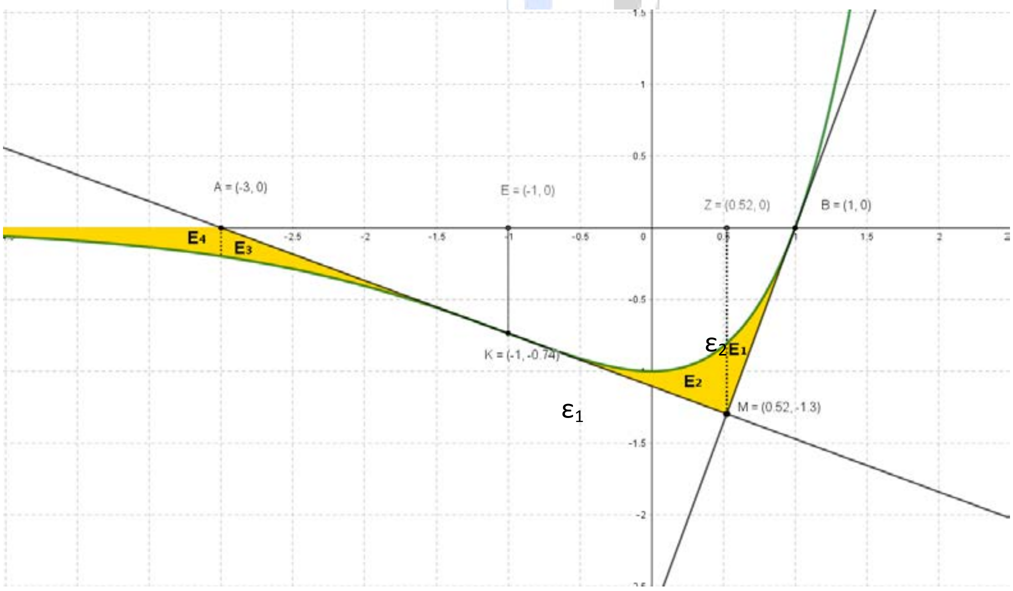
Για $x>-1,\ f''(x)>0$ και για $x<-1,\ f''(x)<0$.

Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει σημείο καμπής το $M(-1,f(-1))=\left(-1,-\frac{2}{e}\right)$

που είναι το σημείο επαφής της εφαπτομένης ε_2.

Όπως γνωρίζουμε η εφαπτομένη στο σημείο καμπής ΄΄διαπερνά΄΄ την καμπύλη της C_f.

Ε.



$$\begin{cases} \varepsilon_1 : y = ex - e \\ \varepsilon_2 : y = -\frac{1}{e}x - \frac{3}{e} \end{cases} \begin{cases} y = ex - e \\ ex - e = -\frac{1}{e}x - \frac{3}{e} \Rightarrow (e^2+1)x = e^2 - 3 \Rightarrow x = \frac{e^2-3}{e^2+1} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{e^2-3}{e^2+1} \\ y = -\frac{4e}{e^2+1} \end{cases}$$

Το σημείο τομής των εφαπτομένων ε_1, ε_2 είναι το $M\left(\frac{e^2-3}{e^2+1}, -\frac{4e}{e^2+1}\right)$.

$\frac{e^2-3}{e^2+1} \simeq 0,52$ και $-\frac{4e}{e^2+1} \simeq -1,3$

$f(x) = (x-1)\cdot e^x$, $f'(x) = xe^x = 0 \Rightarrow x = 0$, $f''(x) = (x+1)e^x = 0 \Rightarrow x = -1$

Για $x \geq 0$ η f είναι γνησίως αύξουσα, ενώ για $x \leq 0$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.

$f([0,1]) \overset{f\nearrow}{=} [f(0), f(1)] = [-1,0]$ και $f((-\infty,0]) \overset{f\searrow}{=} [f(0), \lim_{x\to-\infty} f(x)) = [-1,0)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[(x-1)e^x\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{e^{-x}} \underset{DLH}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

Άρα η ευθεία y = 0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο - ∞ .

Τελικά f(A)=[-1,0], που σημαίνει ότι η f είναι κάτω από τον x΄x στο διάστημα (-∞,1].

Για $x \in [-1,1]$ η f είναι κυρτή, άρα βρίσκεται πάνω από τις εφαπτομένες ε_1, ε_2.

Για $x \leq -1$ η f είναι κοίλη, άρα βρίσκεται κάνω από την εφαπτομένη ε_2.

$$E_1 = \int_{0.52}^{1}\left[(x-1)\cdot e^x - ex + e\right]dx = \left[(x-1)\cdot e^x\right]_{0,52}^{1} - \int_{0,52}^{1} e^x dx + \left[-e\frac{x^2}{2} + ex\right]_{0,52}^{1} =$$

$$\left[(x-1)\cdot e^x\right]_{0,52}^{1} - \left[e^x\right]_{0,52}^{1} + \left[-e\frac{x^2}{2} + ex\right]_{0,52}^{1} = 0,08$$

$$E_2 = \int_{-1}^{0,52}\left[(x-1)\cdot e^x + \frac{1}{e}x + \frac{3}{e}\right]dx = \left[(x-1)\cdot e^x\right]_{-1}^{0,52} - \int_{-1}^{0,52} e^x dx + \left[\frac{1}{e}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{3}{e}x\right]_{-1}^{0,52} =$$

$$\left[(x-1)\cdot e^x\right]_{-1}^{0,52} - \left[e^x\right]_{-1}^{0,52} + \left[\frac{1}{e}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{3}{e}x\right]_{-1}^{0,52} = 0,16$$

$$E_3=\int_{-3}^{-1}\left[-\frac{1}{e}x-\frac{3}{e}-(x-1)\cdot e^x\right]dx=\left[-\frac{1}{e}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{3}{e}x\right]_{-3}^{-1}-\left[(x-1)\cdot e^x\right]_{-3}^{-1}+\int_{-3}^{-1}e^x dx=$$

$$\left[-\frac{1}{e}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{3}{e}x\right]_{-3}^{-1}-\left[(x-1)\cdot e^x\right]_{-3}^{-1}+\left[e^x\right]_{-3}^{-1}=0,12$$

Έστω $k<-3$

$$E(k)=\int_{k}^{-3}\left[-(x-1)\cdot e^x\right]dx=\left[-(x-1)\cdot e^x\right]_{k}^{-3}+\int_{k}^{-3}e^x dx=4e^{-3}+(k-1)e^k+\left[e^x\right]_{k}^{-3}=\frac{5}{e^3}+(k-2)e^k$$

$$E_4=\lim_{k\to-\infty}E(k)=\lim_{k\to-\infty}\left[\frac{5}{e^3}+(k-2)e^k\right]=\frac{5}{e^3}=0,25$$

Το εμβαδόν των χωρίων που κινείται ο Bumblebee θα είναι $E_1+E_2+E_3+E_4=0,61$.