ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Καρακάξης
ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΕΣ-ΘΕΤΙΚΕΣ-ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΣΠΟΥΔΕΣ
ΔΗΜΟΤΙΚΟ-ΓΥΜΝΑΣΙΟ-ΛΥΚΕΙΟ-ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
Τηλέφωνα: 210.98.12.105, 697.83.06.175, 698.69.26.518

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

Α2. α. Τι ονομάζουμε κρίσιμα σημεία συνάρτησης ;.
β. Να δώσετε τον ορισμό του σημείου καμπής.

Α3. Ο καθηγητής σε μια τάξη Γ Λυκείου έδωσε στους μαθητές το εξής πρόβλημα:
Έστω μια συνάρτηση f για την οποία ισχύουν f(1)=1 και
$x+f'(x)=f(x)+x\cdot f'(x),\ x\in\mathbb{R}$.
Ένα μαθητής έδωσε την εξής απάντηση:

$$x+f'(x)\cdot f(x)=f(x)+x\cdot f'(x)\Rightarrow x+f'(x)\cdot f(x)-f(x)-x\cdot f'(x)=0\Rightarrow$$

$$x\left(1-f'(x)\right)-f(x)\left(1-f'(x)\right)=0\Rightarrow\left(1-f'(x)\right)\left(x-f(x)\right)=0\Rightarrow f'(x)=1 \text{ ή } f(x)=x$$

$$f'(x)=1\Rightarrow f(x)=x+c\overset{x=1}{\Rightarrow}c=0,\ \text{ άρα } f(x)=x$$

Ο καθηγητής του είπε ότι η λύση του είναι λάθος. Μπορείτε να βρείτε το λάθος του
μαθητή;

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού τα Α και Β αντίστοιχα.

Αν $f(A) \cap B = \varnothing$, τότε δεν ορίζεται η $g \circ f$.

β. Αν η f(x) είναι κυρτή στο Δ, τότε $f''(x)>0$, για κάθε $x \in \Delta$.

γ. Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f "διαπερνά" την καμπύλη της f.

δ. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης είναι διάστημα.

ε. Η συνάρτηση $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in$ □ − □ δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \dfrac{\alpha}{x-2}$, με α>1.

Α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα
και να βρείτε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της.

Β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f(x) και το σύνολο τιμών της.

Γ. Να χαράξετε την γραφική παράσταση της f και να λύσετε για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, την εξίσωση: $(\lambda+2)x - x^2 = 2\lambda + \alpha$.

Δ. Για α=4 , να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον y΄y και την εφαπτομένη της f στο σημείο της A(1,f(1)).

ΘΕΜΑ Γ

Α. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x)= \ln x$, δέχονται δυο κοινές εφαπτομένες.

Β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(g^{-1}(-x) \cdot \eta\mu \dfrac{1}{x} \right)$.

Γ. Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της f στα διαστήματα όπου αυτή ορίζεται και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}.

Δ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{1-f(x)\cdot g(x)}{f(x)\cdot e^{x}}$, $x>0$, έχει ένα τουλάχιστον ακρότατο $x_0 \in (1, 3)$, με $h(x_0)=-\dfrac{x_0^{\,2}+2}{x_0^{\,3}\cdot e^{x_0}}$.

Ε. Αν $I_\nu=\int_{-1}^{1}(1-f(x))^{\nu}dx$, να δειχθεί ότι: $I_\nu=\dfrac{2\nu}{2\nu+1}I_{\nu-1}$, ν≥2.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση 2 φορές παραγωγίσιμη, με $f(x)\neq 0$ και η ευθεία $y=x+1$ είναι εφαπτομένη της συνάρτησης στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$.

Δίνονται επίσης οι ΄΄1 – 1΄΄ συναρτήσεις $h, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $h(x)-2\left(h\circ g^{-1}\right)(x)=-1$ και $4\left(h\circ g\right)(x)+2\left(h\circ g^{-1}\right)(x)=9x-3$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Α. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(x-1)\left(f(x)-1\right)+2x^{3}-x=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 1).

Β. Αν ισχύει ότι $f''(x)\cdot f(x)=\left(f'(x)\right)^{2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Γ. Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων h και g.

Δ. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης h, είναι πλάγια ασύμπτωτη της $Q(x)=x^{2}\eta\mu\dfrac{1}{x}$ στο $-\infty$ και στη συνέχεια, αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g είναι πλάγια ασύμπτωτη της K(x) στο $+\infty$, να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln x\cdot K(x)}{\left(xK(x)-2x^{2}+3\right)\cdot\left(f(x)-1\right)}\right].$$

Ε. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $T(x)=(x^{2}-3x+1)\cdot f(x)+\dfrac{x^{4}}{4}-x^{3}+4x$ παρουσιάζει δύο τοπικά ελάχιστα και ένα τοπικό μέγιστο.