

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ Α:

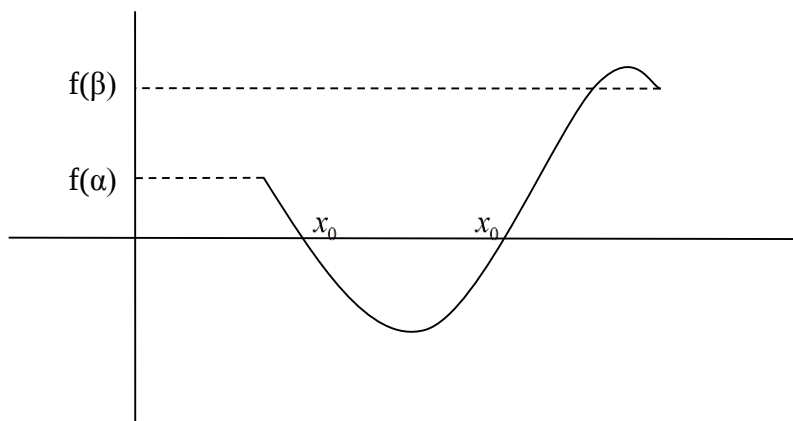
A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 76

A2.

i. Σχολικό βιβλίο σελίδα 275

ii. Ο συγκεκριμένος χαρακτηρισμός είναι **ΨΕΥΔΗΣ**.

Ως αντιπαράδειγμα μπορούμε να φέρουμε οποιαδήποτε συνάρτηση έχει γραφική παράσταση της μορφής:



Ενδεικτικό αντιπαράδειγμα η $f(x) = x^2 - 3x, x \in [-2, 4]$

A3. 1. Δ
2. β
3. Δ.

A4. i. Σωστό
ii. Σωστό

ΘΕΜΑ Β :

B1. $D_f = (0, +\infty)$

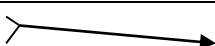
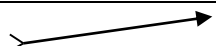
Θα παραγωγίσουμε τη συνάρτηση $f(x) = x + \frac{2}{x} + \ln x$. Συγκεκριμένα θα έχουμε:

$$f'(x) = \left(x + \frac{2}{x} + \ln x \right)' = 1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + x - 2}{x^2}, x > 0$$

Μηδενίζουμε την παράγωγο και έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -2, x = 1$$

Όμως το -2 απορρίπτεται διότι πρέπει $x > 0$. Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	0	1	$+\infty$
$x-1$		-	+
$f'(x)$		-	+
$f(x)$			

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Επίσης η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$ το $f(1)=3$

B2.

Αντίστοιχα θα υπολογίσουμε τη δεύτερη παράγωγο της f . Συγκεκριμένα θα έχουμε:

$$f''(x) = \left(\frac{x^2 + x - 2}{x^2} \right)' = \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} = \frac{4-x}{x^3}, x > 0$$

Θα μηδενίσουμε την f'' και θα έχουμε:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4-x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 4-x = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

Σχηματίζουμε τον πίνακα προκειμένου να βρούμε την κυρτότητα:

x	0	4	$+\infty$
$f''(x)$		+	-
$f(x)$			

Επομένως συμπεραίνουμε ότι η f είναι κυρτή στο διάστημα $(0, 4]$ και κοίλη στο $[4, +\infty)$.

Επίσης η f παρουσιάζει σημείο καμπής για $x = 4$ το σημείο $M\left(4, \frac{9}{2} + 2\ln 2\right)$

B3.

Για τις ασύμπτωτες ευθείες κατά σειρά θα έχουμε:

- Για κατακόρυφη ασύμπτωτη:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{2}{x} + \ln x \right) = +\infty$$

Άρα η ευθεία $x = 0$ (ο άξονας των y) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

- Για οριζόντια/πλάγια ασύμπτωτη:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + \frac{2}{x} + \ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x^2} + \frac{\ln x}{x} \right) = 1 \text{ διότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Ακόμα είναι :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{2}{x} + \ln x - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} + \ln x \right) = +\infty$$

Επομένως η C_f δεν έχει πλάγια/οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

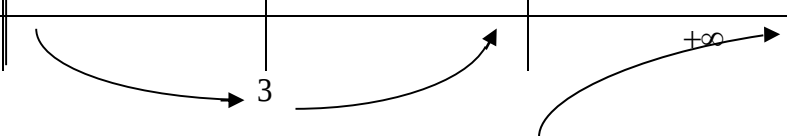
Προφανώς λόγω πεδίου ορισμού, δεν έχει κανένα νόημα να ψάξουμε για ασύμπτωτη στο $-\infty$.

B4.

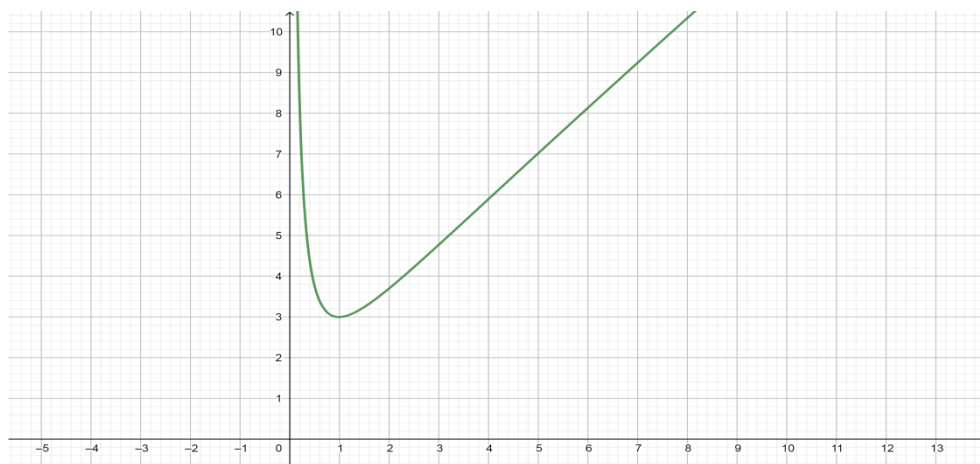
Παρατηρούμε εύκολα ότι η f δεν έχει σημεία τομής με τους άξονες.

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών της f προκειμένου να μπορέσουμε να χαράξουμε τη γραφική της παράσταση.

Ο πίνακας μεταβολών θα έχει τη μορφή:

x	0	1	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	-	
$f''(x)$	-	+	+	
$f(x)$				

Και η γραφική παράσταση θα έχει τη μορφή:



ΘΕΜΑ Γ :

Γ1.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι :

$$x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow -3x_1^3 > -3x_2^3 \Leftrightarrow -3x_1^3 - 1 > -3x_2^3 - 1 \quad (1)$$

$$-x_1 > -x_2 \Leftrightarrow e^{-x_1} > e^{-x_2} \quad (2)$$

Με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη έχουμε:

$g(x_1) > g(x_2)$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ επομένως και 1-1. Άρα αντιστρέφεται.

Έστω

$$g^{-1}\left(\frac{1}{e}-4\right)=x \Leftrightarrow \frac{1}{e}-4=g(x) \Leftrightarrow g(x)=e^{-1}-4=g(1) \Leftrightarrow x=1$$

$$\text{Άρα } g^{-1}\left(\frac{1}{e}-4\right)=1$$

Γ2.

Η g έχει προφανή ρίζα την $x=0$ γιατί $g(0)=e^0-3\cdot 0-1=1-1=0$ κι επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Για κάθε $x < 0 \stackrel{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0$ και για κάθε

$$x > 0 \stackrel{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(x) < g(0) \Leftrightarrow g(x) < 0$$

Γ3.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu(g(x)) - e^{-x} + 3x^3 + 1}{e^{-x} - 3x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\eta\mu g(x)}{g(x)} - \frac{e^{-x} - 3x^3 - 1}{g(x)} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\eta\mu g(x)}{g(x)} - \frac{g(x)}{g(x)} \right) = 0 - 1 = -1 \text{ διότι}$$

$$\left| \frac{\eta\mu g(x)}{g(x)} \right| = \frac{|\eta\mu g(x)|}{|g(x)|} \leq \frac{1}{|g(x)|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|g(x)|} \leq \frac{\eta\mu g(x)}{g(x)} \leq \frac{1}{|g(x)|}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} - 3x^3 - 1) = -\infty$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|g(x)|} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{|g(x)|} \right) = 0$$

Από το κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu g(x)}{g(x)} = 0$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\eta\mu g(x) - g(x)) \stackrel{u=g(x)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty, u \rightarrow -\infty} (\eta\mu u - u) = \lim_{u \rightarrow -\infty} u \left(\frac{\eta\mu u}{u} - 1 \right) = -\infty(0-1) = +\infty$$

Γιατί για $u < 0$ είναι $\left| \frac{\eta\mu u}{u} \right| \leq \left| \frac{1}{u} \right| = -\frac{1}{u} \Leftrightarrow \frac{1}{u} \leq \frac{\eta\mu u}{u} \leq -\frac{1}{u}$

Όμως $\lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{1}{u} = 0 = \lim_{u \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{u} \right)$ άρα από το κριτήριο παρεμβολής ισχύει $\lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu u}{u} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{f(x)} + e^{f(x)} - 2020}{e^{f(x)} + 5^{f(x)}} \stackrel{f(x)=u}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty \Rightarrow u \rightarrow +\infty} \frac{2^u + e^u - 2020}{e^u + 5^u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u \left(\left(\frac{2}{e} \right)^u + 1 - \frac{2020}{e^u} \right)}{5^u \left(\left(\frac{e}{5} \right)^u + 1 \right)} =$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{e}{5} \right)^u \frac{\left(\left(\frac{2}{e} \right)^u + 1 - \frac{2020}{e^u} \right)}{\left(\left(\frac{e}{5} \right)^u + 1 \right)} = 0$$

Γ4.

Έστω $h(x) = g^2(x) + 4g(x) - 5 + 5x, x \in [1, 2]$

Η h είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι :

$$h(1) = g^2(1) + 4g(1) - 5 + 5 = g(1)(g(1) + 4) = \left(\frac{1}{e} - 4 \right) \left(\frac{1}{e} - 4 + 4 \right) < 0 \text{ και}$$

$$h(2) = g^2(2) + 4g(2) + 5$$

Το τριώνυμο $g^2(2) + 4g(2) + 5$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -4 < 0$ οπότε θα είναι παντού ομόσημο του $g^2(2)$.

Άρα $h(2) = g^2(2) + 4g(2) + 5 > 0$

Επειδή $h(1) \cdot h(2) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow g^2(x_0) + 4g(x_0) = 5 - 5x_0$

Γ5.

Είναι $f(x) = \eta\mu g(x) - g(x)$

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $|\eta\mu x| \leq |x|$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, άρα για $x > 0$ είναι

$$|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow -x < \eta\mu x < x \text{ ενώ για } x < 0 \text{ είναι } |\eta\mu x| < -x \Leftrightarrow x < \eta\mu x < -x.$$

Επειδή $x_0 > 0$ είναι $g(x_0) < 0$, οπότε

$$g(x_0) < \eta\mu g(x_0) < -g(x_0) \Rightarrow \eta\mu g(x_0) - g(x_0) > 0 \Leftrightarrow f(x_0) > 0$$

ΘΕΜΑ Δ :

Δ1.

$$f(x) - 1 = \frac{2 \ln x}{f(x) + 1} \Leftrightarrow f^2(x) - 1 = 2 \ln x \Leftrightarrow f^2(x) = 2 \ln x + 1 \Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{2 \ln x + 1}$$

Λύνουμε την εξίσωση :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2 \ln x + 1} = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x = -1 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$$

Επομένως για κάθε $x \geq e^{-\frac{1}{2}}$ η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο (καθώς θα είναι $f(x) \neq 0$)

Όμως $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} - f(1) \right) x^3 + x^2 + 1 = +\infty$ άρα θα πρέπει να ισχύει :

$$\frac{1}{2} - f(1) \leq 0 \Leftrightarrow f(1) \geq \frac{1}{2} > 0$$

Επομένως θα ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x > e^{-\frac{1}{2}}$.

Άρα τελικά θα ισχύει : $f(x) = \sqrt{2\ln x + 1}, x \geq e^{-\frac{1}{2}}$

Δ2.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty \right)$ με

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow 2\ln x_1 < 2\ln x_2 \Rightarrow 2\ln x_1 + 1 < 2\ln x_2 + 1 \Rightarrow \sqrt{2\ln x_1 + 1} < \sqrt{2\ln x_2 + 1}$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα είναι 1-1 και επομένως είναι αντιστρέψιμη.

Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης θα είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
Επειδή η f συνεχής και γνησίως αύξουσα λοιπόν θα έχουμε:

$$f(D_f) = f\left(\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty \right)\right) = \left[f\left(e^{-\frac{1}{2}} \right), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [0, +\infty)$$

Οπότε λύνουμε την εξίσωση :

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{2\ln x + 1} \Leftrightarrow \frac{y^2 - 1}{2} = \ln x \Leftrightarrow x = e^{\frac{y^2 - 1}{2}}$$

Επομένως $f^{-1}(x) = e^{\frac{x^2 - 1}{2}}$ με $D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$

Για να υπολογίσουμε το όριο πρέπει να βρούμε αρχικά τη δεύτερη παράγωγο. Οπότε :

$$f'(x) = (\sqrt{2\ln x + 1})' = \frac{1}{2\sqrt{2\ln x + 1}} (2\ln x + 1)' = \frac{1}{x\sqrt{2\ln x + 1}}$$

Και

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{1}{x\sqrt{2\ln x + 1}} \right)' = \frac{(1)' \cdot x\sqrt{2\ln x + 1} - (x\sqrt{2\ln x + 1})'}{(x\sqrt{2\ln x + 1})^2} = \frac{-\sqrt{2\ln x + 1} - \frac{1}{x\sqrt{2\ln x + 1}} \cdot x}{x^2 (\sqrt{2\ln x + 1})^2} = \\ &= -\frac{\sqrt{2\ln x + 1} + \frac{1}{\sqrt{2\ln x + 1}}}{x^2 (\sqrt{2\ln x + 1})^2} = -\frac{(\sqrt{2\ln x + 1})^2 + 1}{x^2 (\sqrt{2\ln x + 1})^2} = -\frac{2\ln x + 2}{x^2 (2\ln x + 1)\sqrt{2\ln x + 1}} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα θα έχουμε ότι : } f''(e) = -\frac{2\ln e + 2}{e^2(2\ln e + 1)\sqrt{2\ln e + 1}} = -\frac{2+2}{e^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}} = -\frac{4}{e^2 3\sqrt{3}}$$

Επομένως τελικά το όριο θα δίνει το εξής αποτέλεσμα :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(e) \cdot f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{4}{e^2 3\sqrt{3}} \cdot e^{\frac{x^2-1}{2}} = -\infty$$

Δ3.

Έστω $K(\xi, f(\xi))$ το σημείο επαφής μεταξύ της C_f και της εφαπτομένης.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο συγκεκριμένο σημείο θα είναι :

$$(\varepsilon): y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = \frac{1}{\xi\sqrt{2\ln \xi + 1}}x + \frac{2\ln \xi}{\sqrt{2\ln \xi + 1}}$$

Αφού η f διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα έχουμε :

$$0 = \frac{1}{\xi\sqrt{2\ln \xi + 1}} \cdot 0 + \frac{2\ln \xi}{\sqrt{2\ln \xi + 1}} \Leftrightarrow \frac{2\ln \xi}{\sqrt{2\ln \xi + 1}} = 0 \Leftrightarrow \ln \xi = 0 \Leftrightarrow \xi = 1$$

Αντικαθιστώντας για $\xi = 1$ η ευθεία τελικά είναι η : $(\varepsilon): y = x$

Δ4.

Στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ η εξίσωση της εφαπτομένης είναι :

$$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = \frac{1}{x_0\sqrt{2\ln x_0 + 1}}x - \frac{1}{\sqrt{2\ln x_0 + 1}} + \sqrt{2\ln x_0 + 1}$$

Για να διέρχεται από το σημείο $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ θα πρέπει να ισχύει :

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{x_0\sqrt{2\ln x_0 + 1}} \cdot 0 - \frac{1}{\sqrt{2\ln x_0 + 1}} + \sqrt{2\ln x_0 + 1} \Leftrightarrow \sqrt{2\ln x_0 + 1} - \frac{1}{\sqrt{2\ln x_0 + 1}} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{Θεωρώ συνάρτηση } h(x) = \sqrt{2\ln x + 1} - \frac{1}{\sqrt{2\ln x + 1}} - \frac{1}{2}, x \in [1, e].$$

- Η h συνεχής στο $[1, e]$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων.

- $h(1) = -\frac{1}{2} < 0$ και $h(e) = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} = \frac{5-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} > 0$ επομένως
 $h(1) \cdot h(e) < 0$

Από το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2\ln x_0 + 1} - \frac{1}{\sqrt{2\ln x_0 + 1}} - \frac{1}{2} = 0$$

Για κάθε $x_1, x_2 \in [1, e]$ με

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow 2\ln x_1 < 2\ln x_2 \Rightarrow 2\ln x_1 + 1 < 2\ln x_2 + 1 \Rightarrow \sqrt{2\ln x_1 + 1} < \sqrt{2\ln x_2 + 1}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{2\ln x_1 + 1} < \sqrt{2\ln x_2 + 1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\ln x_1 + 1}} > \frac{1}{\sqrt{2\ln x_2 + 1}} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2\ln x_1 + 1}} < -\frac{1}{\sqrt{2\ln x_2 + 1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2\ln x_1 + 1}} - \frac{1}{2} < -\frac{1}{\sqrt{2\ln x_2 + 1}} - \frac{1}{2}$$

Εκτελώντας πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει τελικά ότι η h είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση. Άρα το x_0 είναι μοναδική ρίζα.

Δ5.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{xf(x) - ef(e)}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{xf(x) - xf(e) + xf(e) - ef(e)}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{x(f(x) - f(e)) - f(e)(x - e)}{x - e} =$$

$$= ef'(e) - f(e) = e \frac{1}{e\sqrt{3}} - \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}$$