

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών.

(Μονάδες 7)

A2.

i. Να δώσετε τον ορισμό του σημείου καμπής. (Μονάδες 4)

ii. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$, τότε η f δεν έχει ρίζα στο (α, β) .»

- Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως Αληθή ή Ψευδή (Μονάδα 1)

- Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 3)

(Μονάδες 8)

A3. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής:

1. Η εφαπτομένη της C_f με $f(x) = \ln x$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι κάθετη στην ευθεία $y = \lambda x + 5, \lambda \neq 0$. Τότε το x_0 είναι:

A. 5 **B.** 0 **Γ.** 2λ **Δ.** $-\lambda$ **Ε.** $\frac{1}{\lambda}$

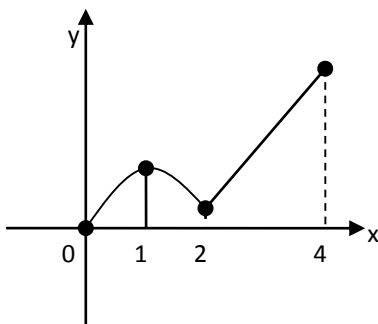
2. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η

εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τη λύση:

α. $x = 0$ **β.** $x = 1$

γ. $x = 2$ **δ.** $x = 4$

ε. καμία από τις παραπάνω



3. Αν $f(x) = e^{2x}$, τότε η $f^{(v)}(x)$ θα ισούται με:

- α. e^{2x} β. e^{vx} γ. $(e^{2x})^v$ δ. $2^v e^{2x}$ ε. ve^{2x}

(Μονάδες 6)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος :

i. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σε αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα Δ .

ii. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται συνάρτηση

$$f(x) = x + \frac{2}{x} + \ln x, x > 0$$

B1. Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 6)

B2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 6)

B3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες της συνάρτησης f . (Μονάδες 6)

B4. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = e^{-x} - 3x^3 - 1$ και

$$f(x) = \eta\mu(g(x)) - e^{-x} + 3x^3 + 1, x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε το $g^{-1}\left(\frac{1}{e} - 4\right)$ (Μονάδες 4)

Γ2. Να βρείτε το πρόσημο της g . (Μονάδες 4)

Γ3. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{f(x)} + e^{f(x)} - 2020}{e^{f(x)} + 5^{f(x)}}$ **(Μονάδες 8)**

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $g^2(x_0) + 4g(x_0) = 5 - 5x_0$ **(Μονάδες 5)**

Γ5. Να δείξετε ότι $f(x_0) > 0$ **(Μονάδες 4)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται η συνεχής συνάρτηση $f : \left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty \right) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(x) - 1 = \frac{2 \ln x}{f(x) + 1}, \quad x \geq e^{-\frac{1}{2}}$$

Αν επιπλέον ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} - f(1) \right) x^3 + x^2 + 1 = +\infty \text{ τότε :}$$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{2 \ln x + 1}$ **(Μονάδες 4)**

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται, να βρείτε την f^{-1} και να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(e) \cdot f^{-1}(x)$ **(Μονάδες 6)**

Δ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f , η οποία άγεται από την αρχή των αξόνων. **(Μονάδες 6)**

Δ4. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ **(Μονάδες 3)**

Δ5. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$ και $\lim_{x \rightarrow e} \frac{xf(x) - ef(e)}{x - e}$ **(Μονάδες 6)**