ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Καρακάξης
ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΕΣ-ΘΕΤΙΚΕΣ-ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΣΠΟΥΔΕΣ
ΔΗΜΟΤΙΚΟ-ΓΥΜΝΑΣΙΟ-ΛΥΚΕΙΟ-ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
Τηλέφωνα: 210.98.12.105, 697.83.06.175, 698.69.26.518

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ 2021

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό σελ. 135
Α2. Σχολικό σελ. 51
Α3. Σχολικό σελ. 23
Α4. α σωστο β λαθος γ σωστο δ σωστο ε σωστο

ΘΕΜΑ Β

Β1. θετω $x+1=u$ αρα $f(u)=ue^{-(u-1)}=ue^{1-u}$ οποτε $f(x)=xe^{1-x}$

Β2. $f'(x)=e^{1-x}+xe^{1-x}(1-x)'=e^{1-x}-xe^{1-x}=e^{1-x}(1-x)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-x>0 \Leftrightarrow x<1$ είναι συνεχης στο 1 αρα η f είναι γνησίως αυξουσα στο (-∞,1]

$f'(x)<0 \Leftrightarrow 1-x<0 \Leftrightarrow x>1$ είναι συνεχης στο 1 αρα η f είναι γνησίως
φθίνουσα στο [1,+∞)
Στο 1 παρουσιάζει ολικό μέγιστο το f(1)=1

Β3. $f''(x)=(1-x)'e^{1-x}+(1-x)(e^{1-x})'=-e^{1-x}-(1-x)e^{1-x}=e^{1-x}(x-2)$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow x>2$

$f''(x)<0 \Leftrightarrow x<2$ οποτε η f παρουσιαζει καμπή στο σημείο (2,f(2))

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot e^{1-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^{1-x}=+\infty$$

Άρα η γραφική παράσταση της f δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot e^{1-x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{1-x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\cdot e^{1-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{1-x}} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0$$

Άρα η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την y=0.

B4. $A_1=(-\infty,1]$ f γνησίως αυξουσα αρα $f(A_1)=(-\infty,1]$
$A_2=(1,+\infty)$ f γνησίως φθινουσα αρα $f(A_2)=(0,1)$

Αρα $f(\mathrm{A}) = f(A_1)\cup f(A_2) = (-\infty,1]$

$f(x)=\lambda$

$\alpha\nu\ \ \lambda\le 0\ \ \mu\iota\alpha\ \ \lambda\upsilon\sigma\eta$

$\alpha\nu\ \ 0<\lambda<1\ \ \varepsilon\chi\varepsilon\iota\ 2\ \lambda\upsilon\sigma\varepsilon\iota\varsigma$

$\alpha\nu\ \ \lambda=1\ \ \mu\iota\alpha\ \lambda\upsilon\sigma\eta$

$\alpha\nu\ \ \lambda>1\ \ \alpha\delta\upsilon\nu\alpha\tau\eta$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Για χ<0 η f συνεχής ως πολυωνυμική

Για 0<χ<3π/2 η f συνεχής ως τριγωνομετρική
Για χ=0

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\left(\alpha x^3-3x^2-x+1\right)=1 \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\sigma\upsilon\nu x=1 \qquad f(0)=1$$

Άρα όντως η f είναι συνεχής στο 0.

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^-}\frac{\alpha x^3-3x^2-x+1-1}{x} = \lim_{x\to0^-}\frac{x\left(\alpha x^2-3x-1\right)}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x} = 0$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ2. I)

- η f συνεχής στο [0,3π/2]
- η f παραγωγίσιμη στο (0,3π/2)

- f(0)=1 και f(3π/2)=0

Άρα η f δεν ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος ROLLE.

2) εστω f(x)=συνx

- f συνεχής στο [π/2,3π/2]
- f παραγωγίσιμη στο (π/2,3π/2)
- f(π/2)=0 και f(3π/2)=0

Άρα από το θεώρημα του rolle

υπάρχει $\xi \in (\pi/2,3\pi 2)$ τ.ω $f'(\xi)=0 \Leftrightarrow \eta\mu\xi=0 \Leftrightarrow \xi=\pi$

Γ3. $f'(x)=3\alpha\chi^2-6\chi-1, \chi<0$ έστω ότι υπάρχει

$x_0 \quad \tau.\omega \quad f'(x_0)=0$

$\Delta=12(3+\alpha)<0 \quad \alpha\delta\upsilon\nu\alpha\tau\eta$

$\alpha\rho\alpha\, f'(x)\neq 0$

Γ4. Για x<0 $f'(x)<0$

Για 0<x<3π/2 $f'(x)=-\eta\mu x=0 \Leftrightarrow x=\pi$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow -\eta\mu x>0 \Leftrightarrow \pi<x<3\pi/2$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow -\eta\mu x<0 \Leftrightarrow 0<x<\pi$

Επομένως η f παρουσιαζει στο x=π ολικό ελαχιστο f(π)=-1αρα

$f(x)\geq f(\pi) \Leftrightarrow f(x)\geq -1$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.

Θέτω k(x)=xlnx-1

Η k(x) είναι συνεχής ως πράξεις σ.σ

$\kappa(1)=-1<0$

$\kappa(e)=e-1>0$

Αρα από θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα

$x_0\in(1,e)\tau.\omega\,\kappa(x_0)=0$

$k'(x)=\ln x+1>0\sigma\tau o(1,e)$

Αρα η ριζα μοναδική.

Δ2.

Από το ερώτημα Δ1 έχουμε : $\ln x_0 = \frac{1}{x_0}$

$f(x) = (\ln x_0)(x+1) - \ln x - 1, x > 0$

$f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = \frac{x - x_0}{x x_0}, x > 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$

x	0	**20**	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	
$f(x)$	↘	↗	

$f(x_0) = (\ln x_0)(x_0 + 1) - \ln x_0 - 1 = \frac{1}{x_0}(x_0 + 1) - \frac{1}{x_0} - 1 = 1 + \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0} - 1 = 0$

Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = x_0$ το $f(x_0) = 0$.

Δ3.

Στο $(-\infty, 0]$ είναι $g(x) \le 0 < h(x)$ άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων δεν τέμνονται.

Στο $(0, +\infty)$ είναι :

$f(x) = (\ln x_0)(x+1) - \ln x - 1 = (\ln x_0)(x+1) - x - 1 - \ln x + x = (\ln x_0)(x+1) - (x+1) - (\ln x - x) =$

$= (x+1)(\ln x_0 - 1) - (\ln x - \ln e^x) = (x+1)(\ln x_0 - \ln e) - \ln \frac{x}{e^x} = (x+1)\ln \frac{x_0}{e} - \ln(xe^{-x}) =$

$= \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} - \ln(xe^{-x}) = \ln(h(x)) - \ln(g(x)) = \ln\left(\frac{h(x)}{g(x)}\right)$

$$h(x)=g(x)\overset{g(x)>0}{\Leftrightarrow}\frac{h(x)}{g(x)}=1\underset{h(x)>0}{\overset{g(x)>0}{\Leftrightarrow}}\ln\frac{h(x)}{g(x)}=\ln 1\Leftrightarrow f(x)=0$$

Και επειδή η f παρουσιάζει ελάχιστο μόνο για $x=x_0$ τότε η εξίσωση $g(x)=h(x)$ έχει μοναδική ρίζα το x_0

Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των g και h έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

$$f'(x)=\left[\ln(h(x))-\ln(g(x))\right]'=\frac{h'(x)}{h(x)}-\frac{g'(x)}{g(x)}$$

$f'(x_0)=0\Leftrightarrow\frac{h'(x_0)}{h(x_0)}-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)}=0\Leftrightarrow\frac{h'(x_0)}{h(x_0)}=\frac{g'(x_0)}{g(x_0)}$ και επειδή ισχύει $g(x_0)=h(x_0)$ θα είναι και $g'(x_0)=h'(x_0)$ άρα οι δυο γραφικές παραστάσεις δέχονται στο μοναδικό κοινό τους σημείο κοινή εφαπτομένη.

Δ4.

$$d(A,B)=\sqrt{(x-x)^2-(f(x)-\phi(x))^2}\ =\left|f(x)-\phi(x)\right|=f(x)-\phi(x)$$

Αν η φ είναι παραγωγισιμη στο x_0 τοτε d(x) παραγωγίσιμη στο x_0
Οπου x_0 το ελάχιστο αρα $d'(x_0)=0\Rightarrow\phi'(\chi_0)=0$ επομένως το χο κρίσιμο σημείο
Αν η φ είναι δεν είναι παραγωγισιμη στο x_0 το χο κρίσιμο σημείο