ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Καρακάξης
ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΕΣ-ΘΕΤΙΚΕΣ-ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΣΠΟΥΔΕΣ
ΔΗΜΟΤΙΚΟ-ΓΥΜΝΑΣΙΟ-ΛΥΚΕΙΟ-ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
Τηλέφωνα: 210.98.12.105, 697.83.06.175, 698.69.26.518

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΤΑΞΗ: …………Γ ΛΥΚΕΙΟΥ……….
ΜΑΘΗΜΑ:………ΜΑΘ. ΠΡΟΣ.……

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ Α:

Α1. Σχολικό Σελίδα 144,145

Α2. Σχολικό Σελίδα 51

Α3.α)Ψ Σχολικό Σελίδα 156
β) Σχολικό Σελίδα 156 Και Σχήμα 42

Α4. Σχολικό Σελίδα 128 Και Σχήμα 18

Α5. α)Σωστό
β)Σωστό
γ)Σωστό

ΘΕΜΑ Β :

Β1.

Είναι της μορφής f(x)= $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με α>0 και γ=0 .

Η κορυφή της δίνεται από τον τύπο Κ($-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}$). Εδώ Κ($3, -\frac{9}{2}$) .

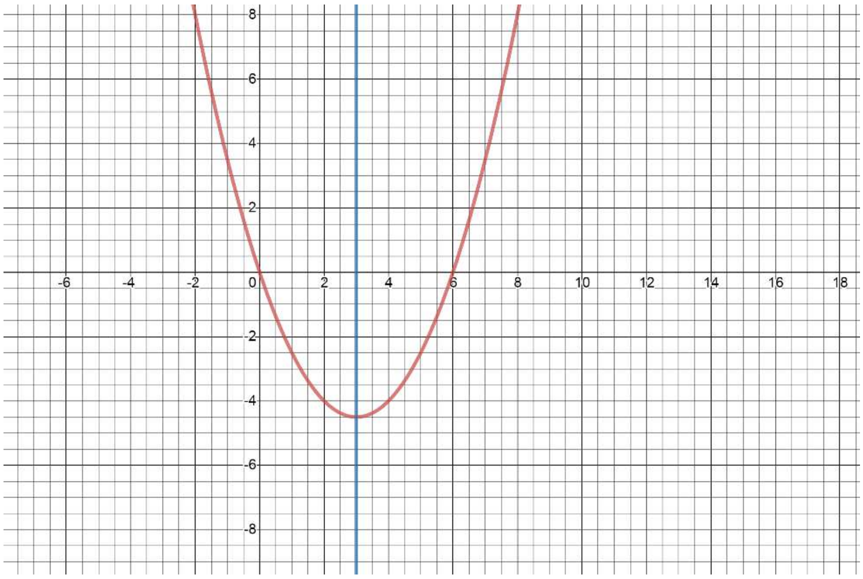
Καθώς α>0 , το Κ αποτελεί ολικό ελάχιστο.

Άξονας συμμετρίας είναι η ευθεία $x=x_k$.Εδώ x=3.

Για χ=0 παρατηρώ ότι f(0)=0 δηλαδή διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο(0,0).

Το συμμετρικό του Ο(0,0) ως προς τον άξονα συμμετρίας x=3 είναι το σημείο Γ(6,0) που αποτελεί για τον λόγο αυτό σημείο της παραβολής.

Ενώνουμε τα σημεία Ο,Κ,Γ με σχήμα παραβολής και προεκτείνουμε.



B2. Έστω Μ(ω,f(ω)) τυχαίο σημείο της C_f .

Το τετράγωνο της απόστασης (ΝΜ) δίνεται από : $(NM)^2=(\omega-3)^2 + (\frac{1}{2}\omega^2 - 3\omega - 1)^2$ =

$= \ldots = \frac{1}{4}\omega^4 - 3\omega^3 + 9\omega^2 + 10$

Θεωρώ συνάρτηση $g(\omega)=\frac{1}{4}\omega^4 - 3\omega^3 + 9\omega^2 + 10$

Συνεχής και παρ/μη στο R με $g'(\omega)= \omega^3 - 9\omega^2 + 18\omega=\omega(\omega^2 - 9\omega + 18)$

ω	$-\infty$ 0	3	6	$+\infty$
g΄(ω)	-	+	-	+
g(ω)	↘	↗	↘	↗

Άρα το (0,g(0)) τοπικό ελάχιστο , το (3,g(3)) τοπικό μέγιστο , το(6,g(6)) τοπικό ελάχιστο
Για να αποφανθούμε με σιγουριά για ολικά ακρότατα το βέλτιστο είναι να βρίσκουμε το σύνολο τιμών.

ΘΕΜΑ Γ :

Γ1.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=1-\sigma\upsilon\nu x$.

Για κάθε $x\neq 2\kappa\pi,\kappa\in\mathbb{Z}$ είναι $f'(x)>0$ κι επειδή η f είναι συνεχής είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=-\eta\mu x-1=-(\eta\mu x+1)$.

Για κάθε $x\neq 2\kappa\pi-\dfrac{3\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}$ είναι $h'(x)<0$ κι επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $f(0)=0=h(0)$.

Για κάθε $x<0$ είναι $f(x)<f(0)=0$ και $h(x)>h(0)=0$

Για κάθε $x>0$ είναι $f(x)>f(0)=0$ και $h(x)<h(0)=0$

Γ2.

Πρέπει να είναι $f(x)=h(x)\Leftrightarrow 2x+1=\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\Leftrightarrow x=0$ διότι είναι για κάθε $x<0$ $f(x)<0<h(x)$ και για $x>0$ είναι $f(x)>0>h(x)$.

Γ3.

Έστω $M\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ το σημείο της C_f με $x_0\in(\pi,2\pi)$. Η εφαπτομένη της C_f στο M είναι η ευθεία ε με εξίσωση :

$$y-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)\Leftrightarrow y-\left(x_0-\eta\mu x_0\right)=\left(1-\sigma\upsilon\nu x_0\right)\left(x-x_0\right)$$

Για να διέρχεται η ε από το σημείο Α της εκφώνησης πρέπει :

$$1-\left(x_0-\eta\mu x_0\right)=\left(1-\sigma\upsilon\nu x_0\right)\left(-x_0\right)\Leftrightarrow 1-x_0+\eta\mu x_0=-x_0+x_0\sigma\upsilon\nu x_0\Leftrightarrow 1+\eta\mu x_0-x_0\sigma\upsilon\nu x_0=0$$

Έστω συνάρτηση $\varphi(x)=1+\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x,\ x\in[\pi,2\pi]$

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(\pi,2\pi)$ με $\varphi'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x=x\eta\mu x$.

Για κάθε $x \in (\pi, 2\pi)$ είναι $\eta\mu x < 0 \Rightarrow \varphi'(x) < 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής , είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\pi, 2\pi]$.

Είναι $\varphi(\pi) = 1 + \eta\mu\pi - \pi\sigma\upsilon\nu\pi = 1 + 0 - \pi(-1) = 1 + \pi > 0$

$\varphi(2\pi) = 1 + \eta\mu 2\pi - 2\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi = 1 + 0 - 2\pi = 1 - 2\pi < 0$

Άρα $\varphi(\pi)\cdot\varphi(2\pi) < 0$ και επειδή η h είναι συνεχής, λόγω του Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (\pi, 2\pi)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = 0$. Επειδή η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\pi, 2\pi]$, το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\varphi(x) = 0$.

Γ4.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sigma\upsilon\nu x - x - 1}{x - \eta\mu x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} - 1}{1 - \frac{\eta\mu x}{x}} = \lim_{x\to 0^-}\left[\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} - 1\right)\frac{1}{1 - \frac{\eta\mu x}{x}}\right] = (-1)(+\infty) = -\infty$$

Γιατί $\lim_{x\to 0^-}\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0, \lim_{x\to 0^-}\left(1 - \frac{\eta\mu x}{x}\right) = 0$ και $1 - \frac{\eta\mu x}{x} = \frac{x - \eta\mu x}{x} = \frac{f(x)}{x} > 0$

Γ5.

Η f είναι συνεχής στο $[x, x+1], x \in (0, \pi - 1)$ και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$ με $f'(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu x$.

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x + 1 - x} \Leftrightarrow 1 - \sigma\upsilon\nu\xi = x + 1 - \eta\mu(x+1) - x + \eta\mu x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\xi = \eta\mu(x+1) - \eta\mu x$$

Είναι
$x < \xi < x + 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x > \sigma\upsilon\nu\xi > \sigma\upsilon\nu(x+1) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(x+1) < \eta\mu(x+1) - \eta\mu x < \sigma\upsilon\nu x$

ΘΕΜΑ Δ :

Δ1.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+\kappa x+2021}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+\kappa x+2021}-x\right)\left(\sqrt{x^2+\kappa x+2021}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+\kappa x+2021}+x\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\kappa x+2021-x^2}{\sqrt{x^2+\kappa x+2021}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\kappa+\frac{2021}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{\kappa}{x}+\frac{2021}{x^2}}+1\right)}=\frac{\kappa+0}{2}=\frac{\kappa}{2}$$

Αφού $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=-3\Leftrightarrow\frac{\kappa}{2}=-3\Leftrightarrow\kappa=-6$

Άρα $f(x)=\sqrt{x^2-6x+2021}, x\in\mathbb{R}$.

Δ2.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^2(x)-xf(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)\left(f(x)-x\right)}{x}$$

Και $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ άρα τελικά $\lim_{x\to+\infty}\frac{f^2(x)-xf(x)}{x}=1\cdot(-3)=-3$

Δ3.

Παραγωγίζοντας την $f(x)=\sqrt{x^2-6x+2021}$ προκύπτει ότι

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2-6x+2021}}\cdot(2x-6)$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2\sqrt{x^2-6x+2021}}\cdot(2x-6)=0\Leftrightarrow 2x-6=0\Leftrightarrow x=3$$

Για $x>3$ έχουμε ότι $f'(x)>0$ άρα $f\nearrow[3,+\infty)$
Για $x<3$ έχουμε ότι $f'(x)<0$ άρα $f\searrow(-\infty,3]$
Στο σημείο $\Sigma(3,f(3))$ έχουμε ολικό ελάχιστο

Για το διάστημα $A_1=(-\infty,3]$ η $f\searrow$ και συνεχής άρα έχουμε :

$$f(A_1)=\left[f(3),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=\left[\sqrt{2012},+\infty\right)$$

Για το διάστημα $A_2 = [3,+\infty)$ η $f \nearrow$ και συνεχής άρα έχουμε :

$$f(A_2) = \left[f(3), \lim_{x\to+\infty} f(x) \right) = \left[\sqrt{2012}, +\infty \right)$$

Παρατηρούμε ότι το $e^{2021} \in f(A_1)$ και ότι $e^{2021} \in f(A_2)$, άρα έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Δ4.

Έστω $g(x) = e^x \left(f(x) - e^{2021} \right)$

- Η g συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πράξη συνεχών.

- Η g παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με παράγωγο

$$g'(x) = \left[e^x \left(f(x) - e^{2021} \right) \right]' = e^x f(x) - e^{x+2021} + e^x f'(x)$$

- $g(x_1) = e^{x_1} \left(f(x_1) - e^{2021} \right) = 0$

  $g(x_2) = e^{x_2} \left(f(x_2) - e^{2021} \right) = 0$

Άρα $g(x_1) = g(x_2)$

Από το Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$ ώστε :

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} f(x_0) - e^{x_0+2021} + e^{x_0} f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} f'(x_0) = e^{x_0+2021} - e^{x_0} f(x_0) \Leftrightarrow$$

$$f'(x_0) = e^{2021} - f(x_0)$$

Δ5.

Έστω σημείο $\Lambda(x(t), y(t)) \Rightarrow \Lambda\left(x(t), \sqrt{x(t)^2 - 6x(t) + 2021}\right)$

$$y'(t) = \frac{x'(t)}{y(t)} \Leftrightarrow y'(t)\,y(t) = x'(t) \Leftrightarrow 2y'(t)\,y(t) = 2x'(t) \Leftrightarrow \left(y^2(t)\right)' = \left(2x(t)\right)' \Leftrightarrow$$

$$\left(x(t)^2 - 6x(t) + 2021\right)' = \left(2x(t)\right)' \Leftrightarrow 2x(t)\,x'(t) - 6x'(t) = 2x'(t) \Leftrightarrow x(t) = 4$$