ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Καρακάξης
ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΕΣ-ΘΕΤΙΚΕΣ-ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΣΠΟΥΔΕΣ
ΔΗΜΟΤΙΚΟ-ΓΥΜΝΑΣΙΟ-ΛΥΚΕΙΟ-ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
Τηλέφωνα: 210.98.12.105, 697.83.06.175, 698.69.26.518

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΤΑΞΗ: …………Γ ΛΥΚΕΙΟΥ……….
ΜΑΘΗΜΑ:………ΜΑΘ. ΠΡΟΣ.……

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ Α:

Α1. Σχολικό Σελίδα 142

Α2. Σχολικό Σελίδα 162

Α3.α)Ψ Σχολικό Σελίδα 99
β) Σχολικό Σελίδα 99 Και Σχήμα 14

Α4. Σχολικό Σελίδα 74 Και Σχήμα 64

Α5. α)Σωστό
β)Σωστό
γ)Λάθος

ΘΕΜΑ Β :

Β1.

Από τον ορισμό της μέσης ταχύτητας έχουμε :

i) $\bar{\upsilon} = \dfrac{x(2)-x(0)}{2} = \dfrac{6}{2} = 3\ \text{m/s}$ ii) $\bar{\upsilon} = \dfrac{x(1)-x(0)}{1} = \dfrac{2}{1} = 2\ \text{m/s}$

iii) $\bar{\upsilon} = \dfrac{x(0{,}5)-x(0)}{0{,}5} = 1{,}5\ \text{m/s}$ iv) $\bar{\upsilon} = \dfrac{x(0{,}1)-x(0)}{0{,}1} = 1{,}1\ \text{m/s}$

Β2.

Η ταχύτητα v όταν $t=0$ είναι :

$$\upsilon = \lim_{h\to 0}\frac{x(0+h)-x(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2+h}{h} = \lim_{h\to 0}(h+1) = 1\,\mathrm{m/s}\,.$$

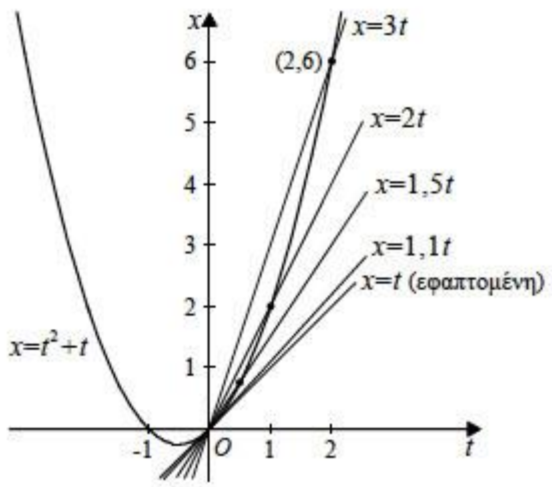
B3.

Αν σε ένα ορθοκανονικό σύστημα ο οριζόντιος άξονας παριστάνει το χρόνο t και ο κατακόρυφος άξονας το *x(t)*, τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$x(t) = t^2 + t = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

είναι σύμφωνα με όσα γνωρίζουμε από την Α΄ Λυκείου, μια παραβολή με κορυφή το σημείο $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία $t = -\frac{1}{2}$

Έτσι, έχουμε την παρακάτω γραφική παράσταση.



B4.

Επειδή οι τέμνουσες διέρχονται από το σημείο *O*(0, 0) και έχουν συντελεστές διεύθυνσης 3, 2, 1,5 και 1,1, οι εξισώσεις τους είναι *x=3t, x= 2t, x=1,5t* και *x=1,1t* αντιστοίχως.
Οι ευθείες αυτές έχουν σχεδιαστεί στο παραπάνω σχήμα.

Η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο της με t=0 θα έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με τη στιγμιαία ταχύτητα όταν t=0, δηλαδή ίσο με 1.
Επειδή η εφαπτομένη αυτή διέρχεται και από την αρχή των αξόνων,
η εξίσωσή της είναι $x=t$, δηλαδή είναι η διχοτόμος της γωνίας των θετικών ημιαξόνων.

ΘΕΜΑ Γ :

Γ1.

Αφού η f είναι συνεχής στο 1, θα πρέπει :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\sqrt{x+k}-4\right) = \sqrt{1+k}-4$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(x^2-x-2\right) = 1-1-2 = -2$$

Άρα θα πρέπει $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \Leftrightarrow \sqrt{1+k}-4=-2 \Leftrightarrow \sqrt{1+k}=2 \Leftrightarrow k=3$

Επιβεβαιώνουμε και ότι $f(1)=\sqrt{1+3}-4=-2$ Άρα τελικά $k=3$.

Για την παραγωγισιμότητα αντίστοιχα θα έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x+3}-4+2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = \frac{1}{4}$$

Επίσης έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-x-2+2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x(x-1)}{x-1} = 1$$

Παρατηρούμε ότι τα δύο όρια είναι διαφορετικά, άρα η συνάρτηση <u>δεν</u> είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Γ2.

Διαδοχικά έχουμε:

Για $x>1$: $\qquad f_1'(x)=\left(\sqrt{x+3}-4\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$

Για $x<1$: $\qquad f_2'(x)=\left(x^2-x-2\right)'=2x-1$

Άρα θα έχουμε : $\quad f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}, & x>1\\ 2x-1, & x<1\end{cases}$

$f_1'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}>0$ άρα η f_1 είναι γνησίως αύξουσα.

$f_2'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$	$1/2$ $\qquad$ $+\infty$
$2x-1$	-	+

Άρα τελικά θα έχουμε :

x	$-\infty$	$1/2$	1 $\qquad$ $+\infty$
$f_1'(x)$			+
$f_2'(x)$	-	+	
$f'(x)$	-	+	+
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Άρα η f είναι :

- γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$
- γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$
- γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $\frac{1}{2}$ το $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{4}$

Αφού η συνάρτηση έχει ολικό ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{4}$ άρα

$f(x)\geq -\frac{9}{4}$ για κάθε $x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)>-3$ αφού $-\frac{9}{4}>-3$ και επομένως

Ισχύει ότι $f(2021)>-3$

Γ3.

Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $\mathrm{A}\left(-1, f(-1)\right)$ θα χρειαστούμε τον κλάδο για $x<1$

Έχουμε κατά σειρά : $x=-1$, $f(-1)=0$ και $f'(-1)=-3$

Άρα για την εξίσωση της εφαπτομένης θα έχουμε ότι :

$y-f(-1)=f'(-1)(x+1)\Leftrightarrow y+0=(-3)(x+1)\Leftrightarrow y=-3x-3$

Παραγωγίζοντας την $f'(x)$ θα έχουμε :

Για $x>1$: $f_1''(x)=\left(\frac{1}{2\sqrt{x+3}}\right)'=.....=-\frac{1}{4(x+3)\sqrt{x+3}}=-\frac{1}{4\left(\sqrt{x+3}\right)^3}$

Για $x<1$: $f_2''(x)=(2x-1)'=2$

Επομένως : $f''(x)=\begin{cases}-\frac{1}{4\left(\sqrt{x+3}\right)^3}, x>1\\ 2, \quad x<1\end{cases}$

Σχηματίζοντας τον αντίστοιχο πίνακα προσήμων έχουμε:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	+	‖	-
$f(x)$			

Άρα για $x<1$ η συνάρτηση είναι κυρτή.

Αφού η f κυρτή στο $(-\infty,1)$ και έχουμε βρεί την εφαπτομένη της C_f

Θα ισχύει

$$f(x) \geq y \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \geq -3x - 3 \Leftrightarrow 3x - x \geq -x^2 + 5 \Leftrightarrow 2x \geq -x^2 + 5 \Leftrightarrow x \geq \frac{-x^2+5}{2}$$

Γ4.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι όλο το $\mathbb{R}$, η f είναι συνεχής άρα δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Για οριζόντια/ πλάγια ασύμπτωτη έχουμε:

Στο $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+3}-4}{x} \underset{D.LH.}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x+3}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \lambda x \right) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+3} - 4 \right) = +\infty$$

Άρα δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Στο $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x-2}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

Άρα δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Άρα η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες.

Γ5.

Βρίσκουμε τα σημεία τομής της f με τους άξονες.

Για $x=0$ προκύπτει $f(0) = 0 - 0 - 2 = -2$

Για y=0 θα έχουμε αντίστοιχα:

Για $x \geq 1$ $\quad f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 13$

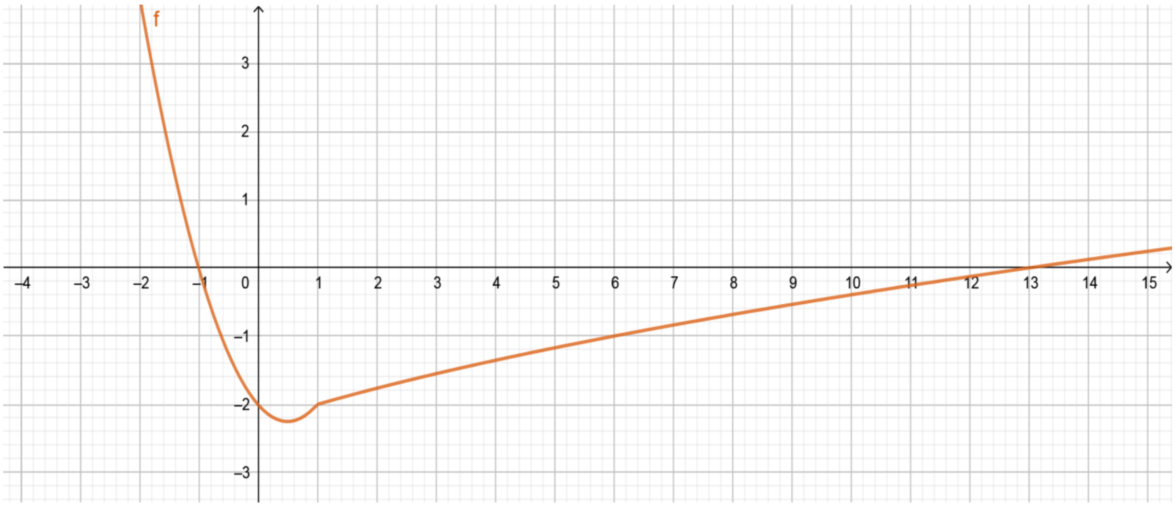
Για $x < 1$ $\quad f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} 2 \ \textit{απορρίπτεται} \\ -1 \ \textit{δεκτή} \end{array} \right.$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών της f προκειμένου να μπορέσουμε να χαράξουμε τη γραφική της παράσταση.

Ο πίνακας μεταβολών θα έχει τη μορφή:

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-		+	‖	+	
$f''(x)$		+		+	‖	-	
$f(x)$	$-\infty$	↘	$-\frac{9}{4}$	↗	-2	↗	$+\infty$

Και η γραφική παράσταση θα έχει τη μορφή:



ΘΕΜΑ Δ :

Δ1.

$$f^3(x) = x - e^{2021} f(x) \Leftrightarrow f^3(x) + e^{2021} f(x) = x \Leftrightarrow$$
$$3f^2(x) f'(x) + e^{2021} f'(x) = 1 \Leftrightarrow$$
$$f'(x)\left(3f^2(x) + e^{2021}\right) = 1 \Leftrightarrow$$
$$f'(x) = \frac{1}{3f^2(x) + e^{2021}} > 0$$

Άρα ισχύει ότι f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα 1-1 άρα αντιστρέψιμη.

Έστω $h(x)=x^3+e^{2021}\cdot x,$ με $D_h=\mathbb{R}$

$h'(x)=3x^2+e^{2021}>0$ Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Θα βρούμε το σύνολο τιμών της h , μιας και είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$h(D_h)=h((-\infty,+\infty))\overset{h\nearrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to-\infty}h(x),\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)\right)=\mathbb{R}$ διότι

$\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$

Έχουμε ότι $f^3(x)+e^{2021}f(x)=x\Leftrightarrow h(f(x))=x\Leftrightarrow h^{-1}(x)=f(x)$

Άρα $D_{h^{-1}}=h(D_h)=\mathbb{R}$

$f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ άρα $f^{-1}(x)=x^3+e^{2021}x, x\in\mathbb{R}$

Δ2.

$f^3(x)+e^{2021}f(x)=x$

Για $x=0$ $f^3(0)+e^{2021}f(0)=0\Leftrightarrow f(0)\left(f^2(0)+e^{2021}\right)=0$

Άρα $f(0)=0$ αφού $f^2(0)+e^{2021}>0$

- Για $x>0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(0)\Leftrightarrow f(x)>0$
- Για $x<0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)<f(0)\Leftrightarrow f(x)<0$

Επομένως η f έχει μοναδική ρίζα το 0.

Δ3.

$f^3(x)+e^{2021}f(x)=x\Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x)+e^{2021}f'(x)=1\Leftrightarrow$

$6f(x)f'(x)f'(x)+3f^2(x)f''(x)+e^{2021}f''(x)=0 \Leftrightarrow$

$3f^2(x)f''(x)+e^{2021}f''(x)=-6f(x)\left[f'(x)\right]^2 \Leftrightarrow$

$f''(x)\left(3f^2(x)+e^{2021}\right)=-6f(x)\left[f'(x)\right]^2 \Leftrightarrow$

$f''(x)=\dfrac{-6f(x)\left[f'(x)\right]^2}{3f^2(x)+e^{2021}}$

Για $x=0$ $f''(x)=0$

- Για $x>0 \Leftrightarrow f(x)>0$ άρα $f''(x)<0$ στο $(-\infty,0)$ άρα είναι **κοίλη** στο $(-\infty,0]$.
- Για $x<0 \Leftrightarrow f(x)<0$ άρα $f''(x)>0$ στο $(0,+\infty)$ άρα είναι **κυρτή** στο $[0,+\infty)$.

Άρα το σημείο $(0,0)$ είναι σημείο καμπής και μάλιστα μοναδικό σημείο καμπής.

Δ4.

Θα εφαρμόσουμε δύο θεωρήματα Θ.Μ.Τ.

Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[0,\kappa]$:

- f συνεχής στο $[0,\kappa]$
- f παραγωγίσιμη στο $(0,\kappa)$

Άρα από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(0,\kappa)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(\kappa)-f(0)}{\kappa}=\frac{f(\kappa)}{\kappa}$$

Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[\kappa,\kappa+1]$:

- f συνεχής στο $[\kappa,\kappa+1]$
- f παραγωγίσιμη στο $(\kappa,\kappa+1)$

Άρα από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2\in(\kappa,\kappa+1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\kappa+1)-f(\kappa)}{\kappa+1-\kappa}=f(\kappa+1)-f(\kappa)$$

Ισχύει ότι $\xi_1 < \xi_2 \overset{f' \nearrow (0,+\infty)}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \dfrac{f(\kappa)}{\kappa} < f(\kappa+1) - f(\kappa) \Leftrightarrow$

$$f(\kappa) < \kappa f(\kappa+1) - \kappa f(\kappa) \Leftrightarrow f(\kappa) + \kappa f(\kappa) < \kappa f(\kappa+1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\kappa+1) f(\kappa) < \kappa f(\kappa+1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{f(\kappa+1)}{f(\kappa)} > \frac{\kappa+1}{\kappa}$$