

## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2

### ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

#### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι **συνεχής**.

-Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε να αποδείξετε ότι το  $f(x_0)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$ .

-Αν η  $f'(x)$  διατηρεί πρόσημο στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , τότε να αποδείξετε ότι το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο και η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(\alpha, \beta)$ .

(Μονάδες 10)

**A2.** Να διατυπώσετε το Κριτήριο Παρεμβολής.

(Μονάδες 4)

**A3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

“Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε ισχύει και  $f''(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . ”

**α)** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (Μονάδα 1)

**β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α). (Μονάδες 3)

**A4.** Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle. (Μονάδες 4)

**A5.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **ΛΑΘΟΣ** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$ .
2. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1-1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

3. Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης  $f$  μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της  $f$ .

(Μονάδες 3)

### ΘΕΜΑ Β

Έστω συνάρτηση με  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

- B1.** Να περιγράψετε αναλυτικά (βήμα προς βήμα) έναν τρόπο χάραξης της  $C_f$  (χωρίς χρήση γνήσιας μονοτονίας και κυρτότητας). (Μονάδες 10)

- B2.** Να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τις τετμημένες των σημείων της  $C_f$  που το τετράγωνο της απόστασής τους από το σημείο εκτός παραβολής  $N(3,1)$  να είναι θέση ακροτάτου και στη συνέχεια το είδος του κάθε ακροτάτου (καθώς και να αποσαφηνιστεί αν πρόκειται για τοπικό ή ολικό ακρότατο). (Μονάδες 15)

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x - \eta\mu x \quad \text{και} \quad h(x) = \sigma\upsilon\nu x - x - 1, x \in \mathbb{R}$$

- Γ1.** Να βρείτε το πρόσημο των  $f, h$ . (Μονάδες 6)

- Γ2.** Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων  $C_f$  και  $C_h$  (Μονάδες 4)

- Γ3.** Να δείξετε ότι η  $C_f$  δέχεται μοναδική εφαπτομένη στο  $(\pi, 2\pi)$  που να διέρχεται από το  $A(0,1)$ . (Μονάδες 5)

- Γ4.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{h(x)}$  (Μονάδες 4)

- Γ5.** Να δείξετε ότι  $\sigma\upsilon\nu(x+1) < \eta\mu(x+1) - \eta\mu x < \sigma\upsilon\nu x$  για κάθε  $x \in (0, \pi - 1)$  (Μονάδες 6)

### **ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$f(x) = \sqrt{x^2 + \kappa x + 2021}, x \in \mathbb{R} \text{ και } \kappa \in \mathbb{R}$$

Για την οποία ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = -3$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $\kappa = -6$ . **(Μονάδες 4)**

Για  $\kappa = -6$

**Δ2.** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^2(x) - xf'(x)}{x}$ . **(Μονάδες 5)**

**Δ3.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = e^{2021}$  έχει ακριβώς 2 ρίζες στο  $\mathbb{R}$ . **(Μονάδες 5)**

**Δ4.** Αν  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να δείξετε ότι η εξίσωση  $f'(x) = e^{2021} - f(x)$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $(x_1, x_2)$ . **(Μονάδες 5)**

**Δ5.** Ένα κινητό σημείο  $\Lambda$  ξεκινά από το σημείο  $A(2, f(2))$  και κινείται κατά μήκος της  $C_f$  με  $x \geq 2$ . Να βρείτε σε ποιο σημείο της  $C_f$  ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του  $\Lambda$  ισούται με το πηλίκο του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του  $\Lambda$  ως προς την τεταγμένη του  $\Lambda$ . (Δίνεται ότι  $x'(t) > 0$  για κάθε  $t, t \geq 0$ )

**(Μονάδες 6)**