

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα Fermat.

(Μονάδες 10)

A2. Να δώσετε τον ορισμό της οριζόντιας ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f .

(Μονάδες 4)

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

“Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.”

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (Μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α). (Μονάδες 3)

A4. Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Bolzano. (Μονάδες 4)

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **ΛΑΘΟΣ** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και $-f$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.
2. Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.
3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 , τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

(Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ Β

Η θέση ενός υλικού σημείου που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση εκφράζεται με τη συνάρτηση $x(t) = t^2 + t$, όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα.

B1. Να βρεθεί η μέση ταχύτητα στα παρακάτω χρονικά διαστήματα:

(i) $[0, 2]$ (ii) $[0, 1]$ (iii) $[0, 0,5]$ (iv) $[0, 0,1]$ **(Μονάδες 8)**

B2. Να βρεθεί η ταχύτητα όταν $t=0$. **(Μονάδες 6)**

B3. Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $x=x(t)$. **(Μονάδες 5)**

B4. Να σχεδιαστούν οι τέμνουσες από το $O(0, 0)$ της γραφικής παράστασης με συντελεστή διεύθυνσης τις μέσες ταχύτητες του ερωτήματος (α). **(Μονάδες 4)**

Επίσης, να βρεθεί και να σχεδιαστεί η εφαπτομένη της καμπύλης της συνάρτησης $x=x(t)$ στο σημείο της με $t=0$. **(Μονάδες 2)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+k} - 4, & x \geq 1 \\ x^2 - x - 2, & x < 1 \end{cases}$$

Γ1. Αν η f είναι συνεχής στο 1, να δείξετε ότι $k = 3$.

Στη συνέχεια, για το a που βρήκατε να εξετάσετε την παραγωγισιμότητα της f στο 1. **(Μονάδες 4)**

Για $k = 3$:

Γ2. Να βρείτε τη μονοτονία της f και να δείξετε ότι $f(2021) > -3$ **(Μονάδες 6)**

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι ισχύει $x \geq \frac{-x^2 + 5}{2}$. **(Μονάδες 6)**

Γ4. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες της συνάρτησης f . **(Μονάδες 5)**

Γ5. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f . **(Μονάδες 4)**

ΘΕΜΑ Δ

Έστω μια συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$f^3(x) = x - e^{2021} f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} . **(Μονάδες 7)**

Δ2. Να βρείτε το πρόσημο της f . **(Μονάδες 6)**

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει μόνο ένα σημείο καμπής, το οποίο και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 6)

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\frac{f(\kappa+1)}{f(\kappa)} > \frac{\kappa+1}{\kappa}$ για κάθε $\kappa \in (0, +\infty)$. **(Μονάδες 6)**

