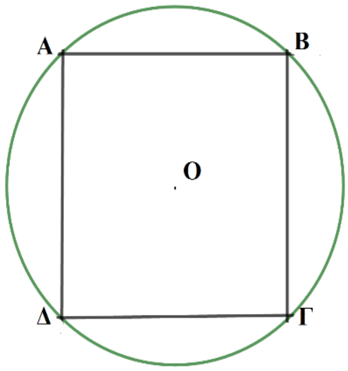
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται κύκλος (O,ρ) με ακτίνα $\rho=2$ και ορθογώνιο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο στον κύκλο, όπως φαίνεται στο σχήμα.



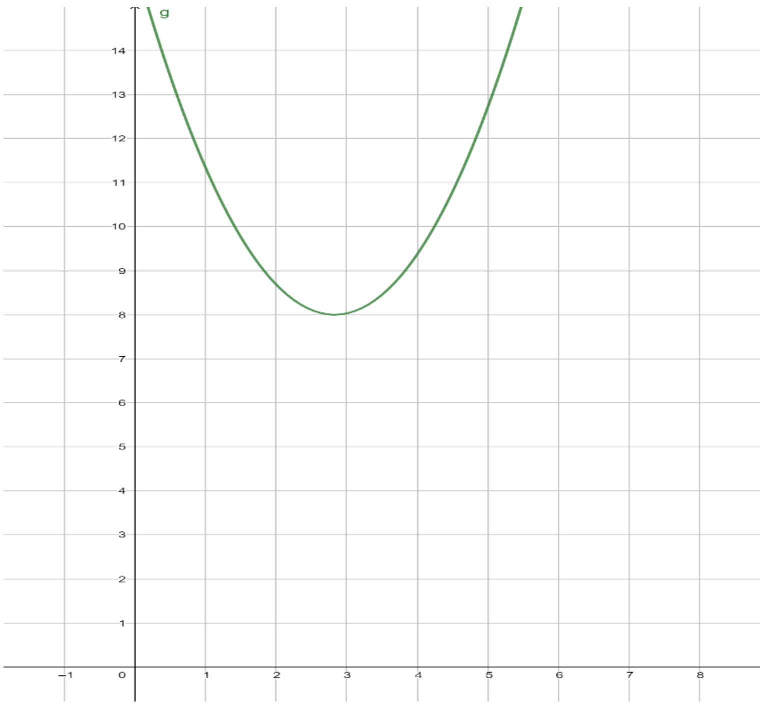
Δ1. Να εξηγήσετε γιατί η διαγώνιος ΑΓ διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.

Δ2. Αν $\mathrm{AB}=x$, να ορίσετε τη συνάρτηση $\mathrm{E}(x)$ που εκφράζει το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, συναρτήσει του x.

Δ3. Αν $E(x)=x\sqrt{16-x^2}$ με $x\in(0,4)$, τότε:

- **i.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=16x^2-x^4$, $x>0$ έχει ολικό μέγιστο το 64
- **ii.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ΑΒΓΔ γίνεται μέγιστο, όταν αυτό είναι τετράγωνο.
- **iii.** Από τη γραφική παράσταση C_g που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, διαλέξτε τον σωστό τύπο για τη συνάρτηση g από τους εξής:

  Α. $g(x)=e^x-x^2+8$ **Β.** $g(x)=x^2-2\sqrt{8}x+16$ **Γ.** $g(x)=\eta\mu 2x+8$



iv. Βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $E(x)=g(x)$

Δ4. Αν $\theta = \mathrm{A\Delta B}$ και $\mathrm{AB}=x$, $\mathrm{A\Delta}=y$, να υπολογίσετε (αν υπάρχει φυσικά) το όριο $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{x-y+4}{\eta\mu^2\theta}$

ΛΥΣΗ

Δ1.

Επειδή η $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι ορθή, εφόσον είναι εγγεγραμμένη γωνία, θα βαίνει σε ημικύκλιο, άρα ΑΓ: διάμετρος $\Rightarrow$ διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.

Δ2.

Είναι $\mathrm{E}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Delta}$. Με $\mathrm{AB}=x$ και $\mathrm{A\Delta}=y$ έχουμε:

Αρχικά από Π.Θ. στο $\mathrm{A\overset{\Delta}{B}\Delta}$: $x^2+y^2=(2\rho)^2 \Leftrightarrow y^2=16-x^2 \overset{y>0}{\Leftrightarrow} y=\sqrt{16-x^2}$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Επίσης AB: πλευρά, άρα } x>0 \\ \text{και } \quad y^2>0 \Leftrightarrow 16-x^2>0\end{array}\right\} \Rightarrow x\in(0,4)$$

Επομένως: $\mathrm{E}(x) = x\cdot\sqrt{16-x^2},\ x\in(0,4)$

Δ3.

i. Αρκεί να δείξω ότι:

$f(x)\le 64$ για κάθε $x>0$ **ΚΑΙ** $64\in f(D_f)$

Πράγματι έχουμε:

$16x^2 - x^4 \le 64 \Leftrightarrow x^4 - 16x^2 + 64 \ge 0 \Leftrightarrow (x^2-8)^2 \ge 0$

που προφανώς ισχύει για κάθε $x>0$ που μας ενδιαφέρει

κι επιπλέον παρατηρώ ότι $f(\sqrt{8}) = 64$, άρα το 64 βρίσκεται στο σύνολο τιμών της f, επομένως η f όντως παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x=\sqrt{8}$ το 64.

ii. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε $16x^2 - x^4 \le 64$ για κάθε $x>0$, άρα ισοδύναμα για $x\in(0,4)$ έχουμε:

$\sqrt{16x^2-x^4} \le \sqrt{64} \Leftrightarrow \sqrt{x^2(16-x^2)} \le 8 \Leftrightarrow |x|\sqrt{16-x^2} \le 8 \underset{|x|=x}{\overset{x>0}{\Leftrightarrow}}$

$E(x)\le 8 \Leftrightarrow E(x) \le E(\sqrt{8})$.

Άρα η συνάρτηση Ε παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=\sqrt{8}$, οπότε και

$y=\sqrt{16-\sqrt{8}^2} = \sqrt{8}$, δηλαδή όταν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

iii. Επειδή ο τύπος που δίνεται στην **επιλογή Β** γράφεται:

$g(x) = x^2 - 2\sqrt{8}x + 16 = x^2 - 2\sqrt{8} + 8 + 8 = (x-\sqrt{8})^2 + 8$, συμπεραίνουμε ότι είναι η γνωστή παραβολή $y=x^2$ μετατοπισμένη διαδοχικά προς τα δεξιά κατά $\sqrt{8}$ μονάδες και προς τα πάνω κατά 8 μονάδες. Επομένως ανταποκρίνεται στο δοσμένο σχήμα.

iv.
$$\left.\begin{array}{l}\text{Εφόσον } \mathrm{E}(x)\le 8 \text{ (και το ίσον ισχύει ΜΟΝΟ για } x=\sqrt{8}) \\ \text{και } g(x)\ge 8 \text{ (και το ίσον ισχύει ΜΟΝΟ για } x=\sqrt{8})\end{array}\right\}\Rightarrow$$

η εξίσωση $E(x) = g(x)$ έχει **μοναδική λύση** την $x=\sqrt{8}$.

(η εύρεση της λύσης δεν είναι υποχρεωτική εφόσον δεν ζητείται στην εκφώνηση).

Δ4.

Από το τρίγωνο ΑΔΒ προκύπτουν οι εξής σχέσεις:

$$\eta\mu\theta = \frac{x}{4} \Leftrightarrow x = 4\eta\mu\theta$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{y}{4} \Leftrightarrow y = 4\sigma\upsilon\nu\theta$$

Άρα το ζητούμενο όριο γράφεται:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{4\eta\mu\theta-4\sigma\upsilon\nu\theta+4}{\eta\mu^2\theta}=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{1}{\eta\mu\theta}\cdot\left(\frac{4\eta\mu\theta}{\eta\mu\theta}+\frac{4-4\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}\right)\right)=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{1}{\eta\mu\theta}\cdot\left(4+4\frac{(1-\sigma\upsilon\nu\theta)(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}{\eta\mu\theta\cdot(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}\right)\right)=$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{1}{\eta\mu\theta}\cdot\left(4+4\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu\theta\cdot(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}\right)\right)=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{1}{\eta\mu\theta}\cdot\left(4+4\frac{\eta\mu^{\cancel{2}}\theta}{\cancel{\eta\mu\theta}\cdot(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}\right)\right)=$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{1}{\eta\mu\theta}\cdot\left(4+4\frac{\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}\right)\right)=+\infty \qquad \text{της μορφής } (+\infty)\cdot(4)$$

Γιατί:

- $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{1}{\eta\mu\theta}\overset{\theta>0}{=}\lim\limits_{\theta\to 0^+}\frac{1}{\eta\mu\theta}=+\infty,$ εφόσον για $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\eta\mu\theta>0$ ένω $\lim\limits_{\theta\to 0^+}\eta\mu\theta=0$
- $\lim\limits_{\theta\to 0}\left(4+4\cdot\frac{\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}\right)=4+4\cdot\frac{0}{2}=4$