ΘΕΜΑ Α

Α1.Θεωρία σχολ.βιβλίου σελ.76

Α2.Θεωρία σχολ.βιβλίου σελ.104

Α3.α)Ψ

β)Σχόλιο σχολ.βιβλίου σελ.136

Α4.

α)Λάθος

β)Σωστό

γ)Σωστό

δ)Σωστό

ε)Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in (1,+\infty)\} = (0,+\infty)$

$\begin{Bmatrix} x \in \mathbb{R} \\ e^x > 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x \in \mathbb{R} \\ x > 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow x > 0$

$fog(x) = f(g(x)) = \dfrac{e^x+2}{e^x-1}, x > 0$

Β2.

Η (fog)(x) παραγωγίσιμη με h'(x)=(fog)'(x)= $\dfrac{e^x(e^x-1)-e^x(e^x+2)}{(e^x-1)^2} = \dfrac{-3e^x}{(e^x-1)^2} < 0$

Άρα η h(x) γν.φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε 1-1,άρα αντιστρέφεται.

$h(x)$ γν.φθίνουσα και συνεχής στο $(0,+\infty)$ άρα $h((0,+\infty))=(\lim\limits_{x\to+\infty} h(x), \lim\limits_{x\to 0} h(x)) = (1,+\infty)$

$(fog)(x) = y$

$\dfrac{e^x+2}{e^x-1} = y \Leftrightarrow e^x+2 = e^x y - y \Leftrightarrow e^x(y-1) = y+2 \overset{y>1}{\Leftrightarrow} e^x = \dfrac{y+2}{y-1} \Leftrightarrow x = \ln\left(\dfrac{y+2}{y-1}\right), y > 1$

$(fog)^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right), x > 1$

B3. Έχουμε ότι $\varphi(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$ επομένως $\varphi'(x)=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-1}=\frac{-3}{(x+2)(x-1)}$.

Άρα η $\varphi(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.

B4. Έχουμε ότι $\lim_{x\to 1^+}\left(l\,n\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right)=+\infty$

- $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)=+\infty$
- $\lim_{x\to +\infty}\left(l\,n\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right)=0$ αφού $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)=1$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε ότι $\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{1-x}-\ln\lambda\right)=1-\ln\lambda\\ \lim_{x\to 0^+}(\eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x)=\lambda\end{aligned}\right\}\Rightarrow 1-\ln\lambda=\lambda$

Θεωρούμε συνάρτηση $g(\lambda)=\lambda+\ln\lambda-1$ που έχει προφανή ρίζα την $\lambda=1$ και

$g'(\lambda)=1+\frac{1}{\lambda}>0$ για $\lambda>0$

Γ2. Τα πλευρικά όρια είναι $\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x(1-x)}=1$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=1$$

Άρα $f'(0)=1$ επομένως ορίζεται η εξίσωση εφαπτομένη είναι $y-1=x\Leftrightarrow y=x+1$

Γ3.

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-x)^2}, x\leq 0\\ \sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x, 0<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$$

$$\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=1 \overset{x\in(0,\frac{3\pi}{2})}{\Leftrightarrow} x=\frac{\pi}{4}, x=\frac{5\pi}{4}$$

x	0		π/4		5π/4		3π/2
συνx-ημx		+		−		+	

Στα (0,π/4) ,(π/4,5π/4) ,(5π/4,3π/2) διατηρείται σταθερό πρόσημο

Κρίσιμα σημεία είναι τα x=π/4, x=5π/4.

Γ4.

$$\alpha'(t)=-\frac{a(t)}{3}$$

$$a'(t_0)=\frac{1}{3}$$

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)\overset{y=0}{\Leftrightarrow}-f(a)=f'(a)(x-a)\Leftrightarrow -\frac{1}{1-a}=\frac{1}{(1-a)^2}(x-a)\Leftrightarrow x=2a-1$$

$$x(t)=2a(t)-1\Leftrightarrow x'(t)=2a'(t)\Leftrightarrow x'(t_0)=2a'(t_0)=\frac{2}{3}\,\mu/s$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε ότι $f'(x)=e^x+2x-e$ και $f''(x)=e^x+2>0$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα

Από θεώρημα Bolzano για την f' έχω:

Η f' είναι συνεχής $[0,1]$

$f'(0)=1-e<0$ και $f'(1)=2>0$

Επομένως υπάρχει $x_0\in(0,1)$ όπου $f'(x_0)=0$ και είναι μοναδικό αφού f' είναι γνησίως αύξουσα.

Έχουμε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,x_0]$ και $f'(x_0)=0$
$x<x_0\Rightarrow f'(x)<f'(x_0)\Leftrightarrow f'(x)<0$ άρα $f'(x)<0$ στο $(-\infty,x_0)$ και επομένως f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,x_0]$

Ακόμα ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,+\infty)$ και $f'(x_0)=0$ άρα $f'(x)>0$ στο $(x_0,+\infty)$ και επομένως f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,+\infty)$.

$f'(x_0)=0\Leftrightarrow e^{x_0}+2x_0-e=0\Leftrightarrow e^{x_0}=e-2x_0$ (1)

Στο x_0 η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(x_0)=e^{x_0}+x_0^2-ex_0-1\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow f(x_0)=x_0^2-x_0(e+2)+e-1.$

Δ2.

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right)=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)-f(x_0)}=+\infty\quad\begin{pmatrix}f(x)\geq f(x_0)\\ f(x)-f(x_0)\geq 0\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{-1+\frac{1}{f(x)-f(x_0)}}_{\downarrow\atop +\infty}\leq\underbrace{\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)+\frac{1}{f(x)-f(x_0)}}_{\downarrow\atop +\infty}$$

Επειδή $\lim_{x\to x_0}\left(-1+\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}\right)=+\infty$ το ζητούμενο όριο είναι $+\infty$.

Δ3.

θεωρώ συνάρτηση $g(x) = f(x) + x - x_0$

Η $g(x)$ συνεχής στο $[x_0, 1]$

$g(x_0) = f(x_0) < 0$

$g(1) = f(1) + 1 - x_0 = 1 - x_0 > 0$

άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει $\rho \in (x_0, 1)$ με $g(\rho)=0$

$g'(x) = f'(x) + 1 > 0$ αφού $f'(x)>0$ στο $(x_0, +\infty)$

Άρα g γνησίως αύξουσα οπότε η ρ μοναδική ρίζα

Δ4.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } [x_0, \rho] \\ f \text{ παραγ. στο } (x_0, \rho) \end{array}\right| \xrightarrow{\text{ΘΜΤ}} \exists \xi \in (x_0, \rho)$$

$$\mu\varepsilon\ f'(\xi) = \frac{f(\rho) - f(x_0)}{\rho - x_0}$$

$$\xi < \kappa \overset{f'}{\Rightarrow} f'(\xi) < f'(\kappa) \Rightarrow$$

$$\frac{f(\rho) - f(x_0)}{\rho - x_0} < f'(k) \Rightarrow$$

$$\frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} < f'(k) \overset{(\alpha\pi\acute{o}\ \Delta3)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{f(x_0) - f(\rho)}{f(\rho)} < f'(k) \overset{\left(\substack{x_0 < \rho \Rightarrow x_0 - \rho < 0 \\ f(\rho) < 0}\right)}{\Rightarrow}$$

$$f(x_0) - f(\rho) > f(\rho) \cdot f'(k)$$