Απαντήσεις Πανελληνίων 2019

ΘΕΜΑ Α

Α1. α) Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ 15. Έστω Α ένα υποσύνολο του . Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

β) Έστω μια συνάρτηση $f : A \to IR$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι 1−1 ,τότε έχει αντίστροφη. (σελ 35 σχολικό βιβλίο).

γ) Εφόσον η συνάρτηση είναι 1–1 τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f , υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της Α για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $g : f(A) \to IR$ με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό x∈ A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

— έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών f (A) της f,

— έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού Α της f και

— ισχύει η ισοδυναμία: f (x) = y ⇔ g(y) = x .

Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το x στο y, τότε η g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f. Για το λόγο αυτό η g λέγεται αντίστροφη συνάρτηση της f και συμβολίζεται με f^{-1} . Επομένως έχουμε: $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ οπότε $f^{-1}(f(x)) = x,\ x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y,\ y \in f(A)$.

Α2. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$. (σελ 142 σχολικό βιβλίο)

Α3. Απόδειξη, (σχολικό βιβλίο, σελ. 135).

Α4. α) Ο ισχυρισμός είναι λάθος.

Για αιτιολόγηση μπορεί να δοθεί ως αντιπαράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 1 & ,x<0 \\ -1 & ,x>0 \end{cases}$, για την οποία παρατηρούμε ότι $f'(x)=0$ στο $\mathrm{A}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ αλλά δεν είναι σταθερή στο Α.

β) Ο ισχυρισμός είναι λάθος.

Για αιτιολόγηση μπορεί να δοθεί ως αντιπαράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & ,x\neq 1 \\ 3 & ,x=1 \end{cases}$, στην οποία είναι $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ ενώ $f(1)=3$.

Α5. Το γ.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού η συνάρτηση έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=2$, θα ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+\lambda\right)=2 \Leftrightarrow 0+\lambda=2 \Leftrightarrow \lambda=2$.

Β2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x=e^{-x}-x+2,\ x\in[2,3]$.

Η g είναι συνεχής στο $[2,3]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Επίσης

$$\left.\begin{aligned} g(2)&=e^{-2}>0 \\ g(3)&=\frac{1}{e^3}-1<0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow g(2)\cdot g(3)<0 \ .$$

Άρα από θεώρημα Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(2,3)$ ώστε $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=x_0$ κι επειδή για $x\in IR$ είναι $g'(x)=-e^{-x}-1<0$, οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα, προκύπτει ότι το $x=x_0$ είναι μοναδική ρίζα της g .

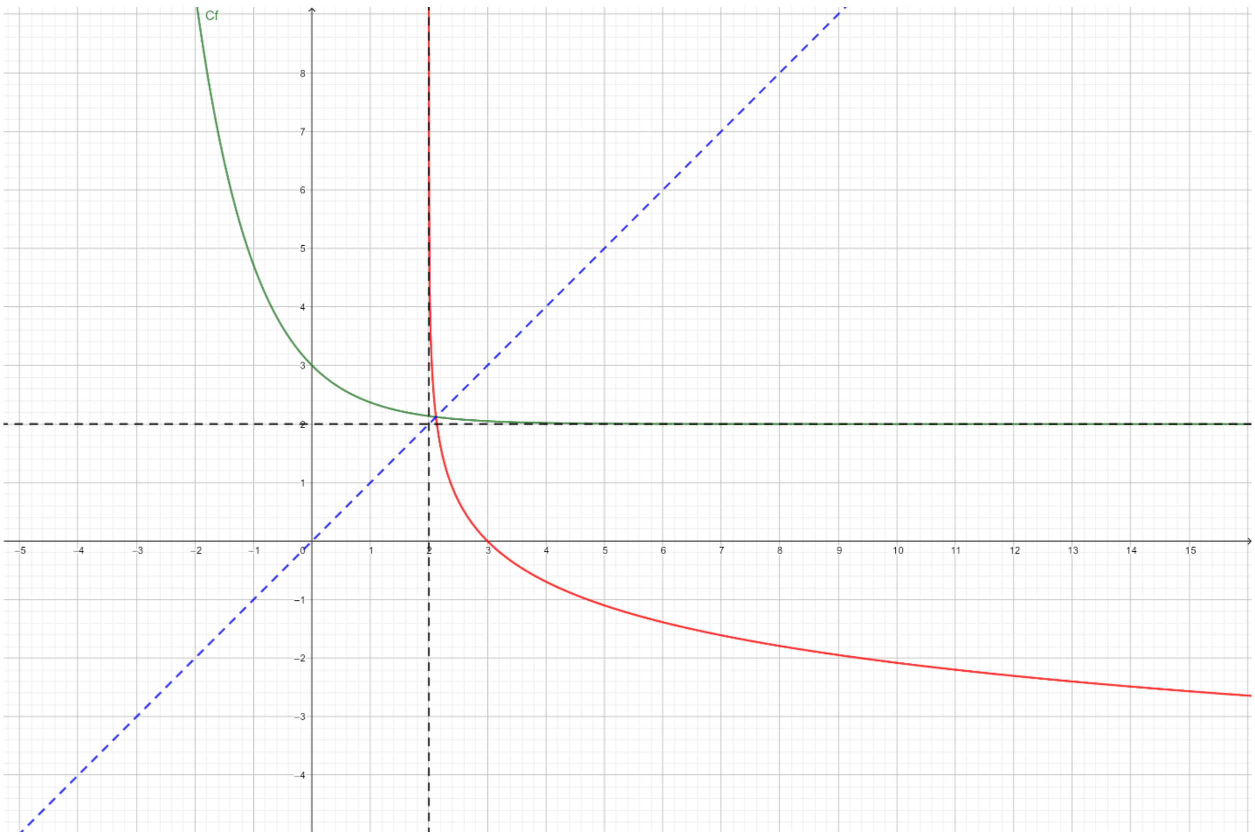
Β3. Είναι $f'(x)=-e^{-x}<0$ για κάθε $x\in IR$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο IR, οπότε αντιστρέφεται. Για να προσδιοριστεί η f^{-1} :

$$y=f(x) \Leftrightarrow y=e^{-x}+2 \overset{y>2}{\Leftrightarrow} y-2=e^{-x} \Leftrightarrow -x=\ln(y-2) \Leftrightarrow x=-\ln(y-2) \ .$$

Άρα: $f^{-1}(x)=-\ln(x-2)\ ,x>2$.

Β4. Είναι: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(-\ln(x-2)\right) \overset{u=x-2>0}{\underset{u_0=0}{=}} \lim\limits_{u\to 0^+}\left(-\ln u\right) = +\infty$. Άρα η συνάρτηση έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=2$.

Για τις γραφικές των f και f^{-1} οι οποίες είναι συμμετρικές ως προς την $y=x$ έχουμε:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο IR, θα είναι και συνεχής. Άρα θα είναι συνεχής και στο 1, δηλαδή θα ισχύει $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^{-1}} f(x) = f(1)$. Όμως:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1+\alpha \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1+\beta\end{array}\right\} \Rightarrow 1+\alpha = 1+\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta \quad (1) .$$

Επιπλέον αφού είναι παραγωγίσιμη στο 1 , θα ισχύει $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$. Όμως:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+\alpha-1-\alpha}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-\alpha}{x-1}\overset{\alpha=\beta}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\alpha x-1-\alpha}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{e^{x-1}-1}{x-1}+\frac{\alpha(x-1)}{x-1}\right)=1+\alpha$$

($\textit{γιατί}$ $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{e^{x-1}}{1}=1$) . Άρα προκύπτει $1+\alpha=2\Leftrightarrow\alpha=1$ και λόγω της (1) $:\beta=1$.

Γ2. Για $x>1$: $f'(x)=2x>0$. Για $x<1$: $f'(x)=e^{x-1}+1>0$. Και $f'(1)=2>0$. Επιπλέον η συνάρτηση είναι συνεχής στο 1, άρα προκύπτει ότι είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το IR. Για το σύνολο τιμών της έχουμε : $f(IR)\underset{\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\eta\varsigma}{\overset{f:\gamma\nu.\alpha\upsilon\xi.}{=}}\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=IR$ αφού:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}+x\right)=-\infty$.

Γ3. i. $f\left((-\infty,0]\right)\underset{\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\eta\varsigma}{\overset{\gamma\nu.\alpha\upsilon\xi.}{=}}\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\,f(0)\right]=\left(-\infty,\dfrac{1}{e}\right]=\Delta_1$. Αφού το μηδέν είναι εσωτερικό του Δ_1, θα υπάρχει $x_0\in(-\infty,0)$ ώστε $f(x_0)=0$. Κι επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το IR, το x_0 είναι και μοναδικό. Οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική αρνητική ρίζα.

ii. Για $x>x_0\overset{f:\gamma\nu.\alpha\upsilon\xi.}{\Rightarrow}f(x)>f(x_0)=0$. Άρα $f^2(x)>0$. (1) Και

$$\left.\begin{array}{l}x_0<0\\ f(x)>0\end{array}\right\}\Rightarrow x_0f(x)<0\Leftrightarrow -x_0f(x)>0 \text{ . (2)}$$

Οπότε προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) προκύπτει ότι $f^2(x)-x_0f(x)>0$ για $x>x_0$.

Άρα η εξίσωση είναι όντως αδύνατη.

Γ4. Για τη χρονική στιγμή t_0 ισχύουν $x(t_0)=3$ και $x'(t_0)=2$.

Όμως για $x\geq 1$ το εμβαδόν του τριγώνου ΜΟΚ είναι : $\mathrm{E}=\dfrac{\mathrm{OK}\cdot\mathrm{KM}}{2}=\dfrac{x\cdot\left(x^2+1\right)}{2}=\dfrac{x^3+x}{2}$.

Για κάθε χρονική στιγμή θα ισχύει: $\mathrm{E}(t)=\dfrac{x^3(t)+x(t)}{2}$ και ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού θα είναι $\mathrm{E}'(t)=\dfrac{3x^2(t)x'(t)+x'(t)}{2}$, οπότε για $t=t_0$ και με αντικατάσταση των γνωστών τιμών προκύπτει: $\mathrm{E}'(t_0)=\dfrac{3\cdot 3^2\cdot 2+2}{2}=28$ τ.μ./sec .

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο IR με $f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\dfrac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}+\alpha$, $x\in IR$.

Αφού η ευθεία $y=-x+2$ εφάπτεται στη C_f στο σημείο $\mathrm{A}(1,1)$ συμπεραίνουμε ότι:

$$\begin{cases} f(1)=1 \\ f'(1)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=1 \\ \alpha=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=2 \\ \alpha=-1 \end{cases}$$

Άρα είναι $f(x)=(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)-x+2$ και $f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\dfrac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1$.

Δ2. Το ζητούμενο εμβαδόν προκύπτει από το εξής ολοκλήρωμα:

$$\mathrm{E}=\int_1^2\left|f(x)-(-x+2)\right|dx=\int_1^2\left|(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)\right|dx \; .$$

Όμως για $x\in[1,2]$ είναι :

- $(x-1)\geq 0$
- $(x-1)^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2-2x+1\geq 0 \Leftrightarrow x^2-2x+2\geq 1 \Leftrightarrow \ln\left(x^2-2x+2\right)\geq \ln 1=0$

Άρα $(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)\geq 0$ για $x\in[1,2]$. Οπότε το εμβαδόν γίνεται:

$$\mathrm{E}=\int_1^2(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)dx=\frac{1}{2}\int_1^2(2x-2)\ln\left(x^2-2x+2\right)dx$$

Θέτω:

$u=x^2-2x+2$ άρα $du=(2x-2)dx$

- $u_1=1$
- $u_2=2$

Οπότε

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\int_1^2\ln u\,du=\frac{1}{2}\left(\left[u\ln u\right]_1^2-\int_1^2 u\frac{1}{u}\,du\right)=\frac{1}{2}\left(2\ln 2-1\ln 1-\left(\left[u\right]_1^2\right)\right)=\frac{1}{2}\left(2\ln 2-1\right)=\ln 2-\frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

Δ3. i. Η προς απόδειξη σχέση ισοδύναμα γράφεται :

$$f'(x)\geq -1 \Leftrightarrow \ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1\geq -1 \Leftrightarrow \ln\left((x-1)^2+1\right)+\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}\geq 0 \; ,$$

Που ισχύει γιατί: $(x-1)^2+1\geq 1 \overset{\ln\uparrow}{\Rightarrow} \ln\left((x-1)^2+1\right)\geq \ln 1=0$ και $\dfrac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}\geq 0$.

ii. Η f πληροί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $\left[\lambda,\lambda+\dfrac{1}{2}\right]$ άρα θα υπάρχει $\xi\in\left(\lambda,\lambda+\dfrac{1}{2}\right)$ τέτοιο

ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}$. Όμως:

$$f'(\xi)\geq -1 \Leftrightarrow \frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}\geq -1 \Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-(\lambda-1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)+\lambda-2\geq -\frac{1}{2}$$

Οπότε: $f\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)+\lambda\geq(\lambda-1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)+\dfrac{3}{2}$.

Δ4. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο IR με $g'(x)=-3x^2-1$.

Έστω $\mathrm{M}(x_1, f(x_1))$ και $\mathrm{N}(x_2, g(x_2))$ τα σημεία επαφής των C_f και C_g αντίστοιχα.

Θα πρέπει να ισχύει $f'(x_1)=g'(x_2)$.

Όμως από **Δ3i**. έχουμε $f'(x)\geq -1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$, ενώ

$g'(x)\leq -1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$, άρα $\mathrm{M}(1, f(1))$ και $\mathrm{N}(0,\mathrm{g}(0))$ μοναδικά σημεία επαφής κι έτσι η κοινή εφαπτομένη είναι η εξής:

$\varepsilon: y-g(0)=g'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=-x+2$.