



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 99

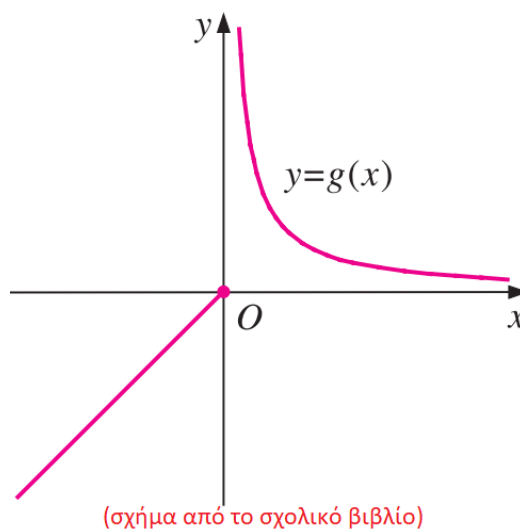
A2. Α. Ψ

Β. (σχολικό βιβλίο σελ. 35)

Για παράδειγμα η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

είναι «1-1» αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη όπως φαίνεται και στο σχήμα.



A3. Σχολικό βιβλίο σελ 216

A4. α) Λ

β) Λ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε ένα από τα διαστήματα $A_1 = (-\infty, 0)$, $A_2 = (0, +\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x) = 1 + \frac{8}{x^3} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x^3 + 8}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 8}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$$

Για να βρούμε το πρόσημο της f' θα βρούμε το πρόσημο του πηλίκου $\frac{x^3 + 8}{x^3}$ με βάση το παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$x^3 + 8$	-	○	+	+
x^3	-	-	○	+
$x^3 \cdot (x^3 + 8)$	+	-	+	+

Άρα το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	+
$f(x)$	↗	↘	↗	

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $(0, +\infty)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2, 0)$.

Στην θέση $x_0 = -2$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-2) = -3$

B2. Η $f'(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε ένα από τα διαστήματα

$A_1 = (-\infty, 0)$, $A_2 = (0, +\infty)$ με παράγωγο :

$$f''(x) = -\frac{24}{x^4} < 0 \text{ για κάθε } x \neq 0$$

άρα η f είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$

B3. Κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x = 0$.

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - 4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(x^3 - 4) \cdot \frac{1}{x^2} \right] = -\infty$$

διότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 - 4) = -4$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - 4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[(x^3 - 4) \cdot \frac{1}{x^2} \right] = (-4) \cdot (+\infty) = -\infty$$

διότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 - 4) = -4$$

Άρα η ευθεία $x = 0$ (ο άξονας $y'y$) κατακόρυφη ασύμπτωτη της f .

Πλάγιες –Οριζόντιες στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Για να είναι η $y = \lambda x + \beta$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$) αρκεί τα όρια

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{και} \quad \beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] \quad \text{να είναι πραγματικοί αριθμοί}$$

$$(\text{αντιστοίχως } \lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{και} \quad \beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x])$$

Είναι,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3 - 4}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4}{x^3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 4}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4 - x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x^2} = 0$$

Άρα η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της f στο $+\infty$.

Επίσης,

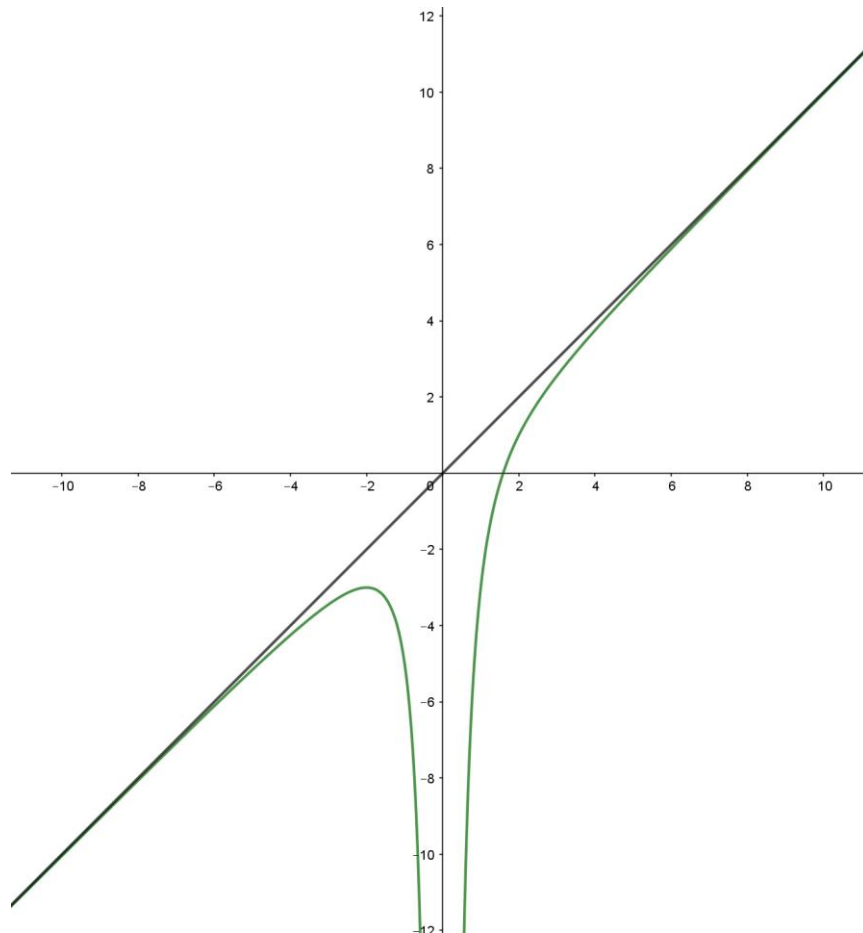
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^3 - 4}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4}{x^3} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3 - 4}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4 - x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{x^2} = 0$$

Άρα η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της f στο $-\infty$.

B4. Με βάση τα παραπάνω ερωτήματα η γραφική παράσταση της f είναι η παρακάτω :



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η περίμετρος του τετραγώνου είναι x m, οπότε η πλευρά του θα είναι $\frac{x}{4}$. Επειδή το x παριστάνει μήκος πρέπει να είναι $x > 0$ αλλά και $x < 8$ που είναι το συνολικά μήκος του σύρματος, άρα $0 < x < 8$. Επομένως το εμβαδό του τετραγώνου είναι $\frac{x^2}{16}$. Με το υπόλοιπο του σύρματος το οποίο είναι $8 - x$ κατασκευάζουμε τον κύκλο που έχει μήκος:

$$L = 2\pi\rho \Leftrightarrow 8 - x = 2\pi\rho \Leftrightarrow \rho = \frac{8 - x}{2\pi} \text{ m}$$

Οπότε ο κύκλος έχει εμβαδόν:

$$E = \pi\rho^2 = \pi\left(\frac{8 - x}{2\pi}\right)^2 = \pi\frac{(8 - x)^2}{4\pi^2} = \frac{(8 - x)^2}{4\pi}$$

Το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι:

$$E(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(8-x)^2}{4\pi} = \frac{\pi x^2 + 4(8-x)^2}{16\pi} = \frac{\pi x^2 + 4(64 - 16x + x^2)}{16\pi}$$

$$= \frac{\pi x^2 + 256 - 64x + 4x^2}{16\pi} = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, x \in (0, 8)$$

Γ2. Το $E(x)$ ως τριώνυμο του x με $a = \frac{\pi + 4}{16\pi} > 0$ παρουσιάζει ελάχιστο στο

$$x_0 = -\frac{-64}{2(\pi + 4)} = \frac{32}{\pi + 4}$$

και είναι $E \searrow (0, x_0]$ και $E \nearrow [x_0, 8)$, τότε η διάμετρος του κύκλου είναι

$$\delta = 2\rho = \frac{8 - \frac{32}{\pi + 4}}{\pi} = \frac{8}{\pi + 4}$$

και η πλευρά του τετραγώνου είναι

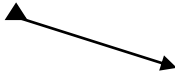
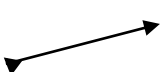
$$\alpha = \frac{\frac{32}{\pi + 4}}{4} = \frac{8}{\pi + 4} = \delta.$$

Β' τρόπος

Η E είναι παραγωγίσμη με $E'(x) = \frac{1}{16\pi}(2(\pi + 4)x - 64) = \frac{1}{8\pi}((\pi + 4)x - 32)$ με $x \in (0, 8)$

Είναι

- $E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{32}{4 + \pi}$
- $E'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{32}{4 + \pi}$
- $E'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{32}{4 + \pi}$

x	0	$\frac{32}{\pi + 4}$	8
$E'(x)$		—	+
$E(x)$			

Άρα, είναι $E \searrow (0, x_0]$ και $E \nearrow [x_0, 8)$ και η E παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = \frac{32}{\pi + 4}$ το

$$E\left(\frac{32}{\pi + 4}\right) = \frac{1}{16} \left[(\pi + 4) \frac{32^2}{(\pi + 4)^2} - 64 \frac{32}{\pi + 4} + 8 \cdot 32 \right] = \frac{32}{16\pi} \left(\frac{32}{\pi} - \frac{64}{\pi} + 8 \right) = \frac{16}{\pi + 4}$$

Τότε η διάμετρος του κύκλου $\delta = 2\rho = \frac{8 - \frac{32}{\pi+4}}{\pi} = \frac{8}{\pi+4}$ και η πλευρά του τετραγώνου είναι

$$\alpha = \frac{\frac{32}{\pi+4}}{4} = \frac{8}{\pi+4} = \delta.$$

Γ3. Η E είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$ άρα

$$E\left(\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]\right) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x \rightarrow 0^+} E(x)\right] = \left[\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi}\right)$$

$$\text{αφού } E\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{16}{\pi+4} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} E(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \frac{256}{16\pi} = \frac{16}{\pi}$$

Η E είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$ άρα

$$E\left(\left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)\right) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x \rightarrow 8^-} E(x)\right) = \left[\frac{16}{\pi+4}, 4\right)$$

αφού

$$E\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{16}{\pi+4}$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 8^-} E(x) = \lim_{x \rightarrow 8^-} \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \lim_{x \rightarrow 8^-} \frac{(\pi+4) \cdot 8^2 - 64 \cdot 8 + 256}{16\pi} = 4$$

- $5 \in E\left(\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]\right)$ (διότι $\frac{16}{\pi+4} < 5 < \frac{16}{\pi} \Leftrightarrow \frac{1}{\pi+4} < \frac{5}{16} < \frac{1}{\pi} \Leftrightarrow \pi < \frac{16}{5} < \pi+4$) και E γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$ ώστε $E(x_1) = 5$.
- $5 \notin E\left(\left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)\right)$ άρα δεν υπάρχει $x_2 \in \left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$ ώστε $E(x_2) = 5$ τελικά υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$ ώστε $E(x_1) = 5$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

- $f'(x) = 2e^{x-\alpha} - 2x$
- $f''(x) = 2e^{x-\alpha} - 2$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} = e^0 \Leftrightarrow x = \alpha$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \alpha$

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Έχουμε σημείο καμπής το $(\alpha, f(\alpha))$ δηλαδή το $(\alpha, 2 - \alpha^2)$, αφού επιπλέον ορίζεται η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $(\alpha, f(\alpha))$.

Δ2. Είναι,

- $f'(x) = 2(e^{x-\alpha} - x), x \in \mathbb{R}$
- $f''(x) = 2(e^{x-\alpha} - 1)$

x	$-\infty$	x_1	a	x_2	$+\infty$
$f''(x)$	-	-	0	+	+
$f'(x)$					
$f(x)$					

Η συνάρτηση f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = \alpha$ το $f'(\alpha) = 2(1 - \alpha) < 0$ αφού $f' \searrow$ στο $(-\infty, \alpha]$ και $f' \nearrow$ στο $[\alpha, +\infty)$.

Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2(e^{x-\alpha} - x) \right] = +\infty \text{ διότι, } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-\alpha} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

Αντίστοιχα,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2e^{x-\alpha} \cdot \left[1 - \frac{x}{e^{x-\alpha}} \right] \right) = +\infty \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-\alpha} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-\alpha}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{DLH} \frac{1}{e^{x-\alpha}} = 0$$

$$\text{συνεπώς } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x}{e^{x-\alpha}} \right) = 1 > 0$$

- $A_1 = (-\infty, \alpha]: f'$ συνεχής και $\searrow$ άρα

$$f'(A_1) = \left[f'(\alpha), \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) \right) = \left[2 \underbrace{(1-\alpha)}_{-}, +\infty \right)$$

άρα $0 \in f'(A_1) \rightarrow$ υπάρχει $x_1 \in (-\infty, \alpha): f'(x_1) = 0$ και x_1 μοναδικό αφού $f' \searrow$ στο A_1

$$f'(x) = 0 = f'(x_1) \stackrel{f' \searrow \text{ άρα 1-1}}{\Leftrightarrow} x = x_1$$

$$f'(x) > 0 = f'(x_1) \stackrel{f' \searrow}{\Leftrightarrow} x < x_1$$

$$f'(x) < 0 = f'(x_1) \stackrel{f' \searrow}{\Leftrightarrow} x > x_1$$

- $A_2 = [\alpha, +\infty): f'$ συνεχής και $\nearrow$ άρα $f'(A_2) = \left[f'(\alpha), \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \right) = \left[2 \underbrace{(1-\alpha)}_{-}, +\infty \right)$

$0 \in f'(A_2) \Rightarrow$ υπάρχει $x_2 \in (\alpha, +\infty): f'(x_2) = 0$ και x_2 μοναδικό αφού $f' \nearrow$ στο A_2

$$f'(x) = 0 = f'(x_2) \stackrel{f' \nearrow A_2}{\Leftrightarrow}_{1-1} x = x_2$$

$$f'(x) > 0 = f'(x_2) \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} x > x_2$$

$$f'(x) < 0 = f'(x_2) \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} x < x_2$$

έτσι έχουμε $f \nearrow$ στο $(-\infty, x_1], [x_2, +\infty)$ και $f \searrow$ στο $[x_1, x_2]$ και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2 .

Δ3. Θεωρούμε την $g(x) = f(x) - f(1)$, $x \in [\alpha, x_2]$ έχουμε:

$$g'(x) = f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_2), \text{ άρα η } g \searrow \text{ στο } [\alpha, x_2],$$

Για

$$\alpha < x < x_2 \stackrel{g \searrow}{\Rightarrow} g(x) < g(\alpha) \Rightarrow f(x) - f(1) < f(\alpha) - f(1) \quad (1)$$

Όμως $1 < \alpha$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, \alpha)$ αφού

$$1 < x < \alpha \stackrel{f' \searrow [1, \alpha]}{\Rightarrow} f'(x) < f'(1) = 2(1 - \alpha) < 0$$

άρα η $f \searrow$ στο $[1, \alpha]$

$$\alpha > 1 \stackrel{f \searrow}{\Rightarrow} f(\alpha) < f(1)$$

Από την (1) έχουμε $f(x) - f(1) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη.

Β' τρόπος

Είναι,

$$f(\alpha) < f(1) \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} - 1 > 2 - \alpha^2 \Leftrightarrow 2(e^{1-\alpha} - 1) + \alpha^2 - 1 > 0 \text{ που ισχύει}$$

διότι,

$$e^{1-\alpha} > 1 - \alpha + 1 \text{ με } \alpha > 1$$

άρα,

$$e^{1-\alpha} - 1 > 1 - \alpha \Leftrightarrow 2(e^{1-\alpha} - 1) > 2 - 2\alpha \Leftrightarrow 2(e^{1-\alpha} - 1) + \alpha^2 - 1 > \alpha^2 - 2\alpha + 1 = (\alpha - 1)^2 > 0$$

Γ' τρόπος

Αρχικά θα δείξουμε ότι $x_1 < 1$. Έστω $x_1 \geq 1$ τότε

$$f'(x_1) \leq f'(1) \Rightarrow 0 \leq f'(1) \Rightarrow 0 \leq 2e^{1-\alpha} - 2 \Leftrightarrow 1 \leq e^{1-\alpha} \Leftrightarrow 0 \leq 1 - \alpha \Leftrightarrow \alpha \leq 1 \text{ άτοπο.}$$

Άρα,

$$x_1 < 1$$

Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = f(1)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (\alpha, x_2)$ άρα

$$f(x_0) = f(1)$$

οπότε ικανοποιείται το Θεώρημα Rolle για την f στο κλειστό διάστημα $[1, x_0]$ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, x_0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, άτοπο διότι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2) \subseteq (1, x_0)$

Δ' τρόπος

Αποδεικνύουμε όπως στο Γ' τρόπο ότι $x_1 < 1$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, x_2] \subseteq [\alpha, x_2]$ άρα και $1 - 1$ οπότε:

$$f(x) = f(1) \Leftrightarrow x = 1 \notin (1, x_2) \subseteq (\alpha, x_2).$$

Ε' τρόπος

Είναι

$$f'(1) = 2(e^{1-\alpha} - 1) < 0$$

αφού

$$1 < \alpha \Leftrightarrow 1 - \alpha < 0 \Rightarrow e^{1-\alpha} < 1$$

και επειδή $f'(x) < 0$, $x \in (x_1, x_2)$ ισχύει τελικά $x_1 < 1 < \alpha < x_2$.

Η εξίσωση $f(x) = f(1)$ έχει μοναδική λύση λόγω μονοτονίας της f στο διάστημα (x_1, x_2) την $x = 1$ επομένως δεν μπορεί να έχει λύση στο διάστημα (α, x_2) .

Δ4. Η f είναι κυρτή στο διάστημα $[2, +\infty)$. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $(2, f(2))$ είναι

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Rightarrow y + 2 = -2(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 2$$

Άρα για κάθε $x \geq 2$ έχουμε:

$$f(x) \geq -2x + 2 \stackrel{\sqrt{x-2} \geq 0}{\Rightarrow} f(x)\sqrt{x-2} \geq -2 \cdot (x-1)\sqrt{x-2}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο στο 2 άρα,

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > \int_2^3 -2(x-1)\sqrt{x-2}dx \quad (1)$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\int_2^3 -2(x-1)\sqrt{x-2}dx = -\frac{32}{15}$

Θέτουμε $u = x - 2 \Rightarrow du = dx$

Για $x = 2$ $u = 0$

$x = 3$ $u = 1$

Άρα

$$\begin{aligned} -2 \int_2^3 (x-1)\sqrt{x-2}dx &= -2 \int_0^1 (u+1)\sqrt{u}du = -2 \int_0^1 u\sqrt{u}du - 2 \int_0^1 \sqrt{u}du \\ &= -2 \frac{2}{5} \left[u^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 - 2 \frac{2}{3} \left[u^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = -\frac{32}{15} \end{aligned}$$